大学入試数学　実戦演習　第25回

1．あるスポーツの大会で、参加した n 個のチームは次の方法（リーグ戦形式）で順位を争う。すなわち、どのチームも他の各チームとそれぞれ1回ずつ試合を行い、勝ち数の大小によって順位を決めるものとする。今年の大会では、引き分けが1回も起こらず、また同順位のチームがなかったという。このとき、どのチームもそれより下のチームには必ず勝っていることを証明せよ。

2．点 $(0,1,3)$ を通り、球 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ と接する直線の全体を考える。

(1) 直線と球の接点の全体は1つの平面上にある。この平面の方程式を求めよ。

(2) これらの直線が xy 平面と交わる点の全体は、xy 平面上の曲線となる。この曲線の方程式を求めよ。

3．整数を係数とする3次式 $f(x)$ が次の条件 (*) を満たしている。

(*) 任意の自然数 n に対し $f(n)$ は $n(n+1)(n+2)$ で割り切れる。

このとき、ある整数 a があって $f(x)=ax(x+1)(x+2)$ となることを示せ。

4．整数 p を a進法, b進法, $\dfrac{a+b}{2}$進法（a,b は2以上の整数で偶奇が一致し $p \geqq \dfrac{a+b}{2}$）で表したときの桁数をそれぞれ $\ell, m, n+1$ とすると $\dfrac{1}{\ell}+\dfrac{1}{m}<\dfrac{2}{n}$ であることを示せ。

5．複素数平面上で、△ABCの頂点を表す複素数を α, β, γ とする。条件

(i) △ABCは1辺が$\sqrt{3}$の正三角形である。

(ii) $\alpha+\beta+\gamma=3$

(iii) $\alpha\beta\gamma$ は絶対値1で、虚部は正

が成り立つとき、次の問いに答えよ。

(1) $z=\alpha-1$ とするとき、β, γ を z を用いて表せ。

(2) α, β, γ の偏角を求めよ。（ただし $0° \leqq \arg\alpha \leqq \arg\beta \leqq \arg\gamma < 360°$）

6．n を自然数, $0<a<b$ とする。$n+2$ 個の正の実数 $a,c_1,c_2,\cdots,c_n,b$ がこの順に等差数列をなし、$n+2$ 個の正の実数 $a,e_1,e_2,\cdots,e_n,b$ がこの順に等比数列をなすものとする。

(1) c_1c_n と e_1e_n のどちらが大きいか理由とともに答えよ。

(2) c_1+c_n と e_1+e_n のどちらが大きいか理由とともに答えよ。

(3) $i=1,\cdots,n$ について、c_i と e_i のどちらが大きいか理由とともに答えよ。

大学入試数学　精選問題演習　第3回

1. n^4+4 が素数であるような自然数 n を全て求めよ。

2. 底面の半径が r, 高さが h (>10) の円錐に半径5の球が内接している。
(1) r を h を用いて表せ。
(2) この円錐の表面積を最小にする h の値を求めよ。

3. n を3以上の整数, a,b,c は1以上n以下の整数とする。
(1) $a<b<c$ となる a,b,c の組は何通りあるか。
(2) $a\leqq b\leqq c$ となる a,b,c の組は何通りあるか。
(3) $a<b$ かつ $a\leqq c$ となる a,b,c の組は何通りあるか。

4. $\triangle ABC$に関し、次の等式を証明せよ。
(1) $(b-a\cos C)\sin B=(c-a\cos B)\sin C$.
(2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.
(3) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

5. 実数全体を動く a に対し放物線 C: $y=-x^2+2ax-a^2+a+1$ を考える。
(1) C と放物線 $y=x^2+\frac{1}{2}$ の2つの共有点を結ぶ線分の中点(共有点が1つの場合にはその点自身とする)が描く軌跡の長さを求めよ。
(2) $y\geqq x^2+\frac{1}{2}$ の表す領域のうちで C が通過する部分の面積を求めよ。

6. 曲線 $y=e^x$ 上の点 P と円 $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 上の点 Q とを結ぶ線分 PQ の長さの最小値を求めよ。