2026年度　東京大学　理系数学（150分）

□1 (1) 関数 $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ の区間 $-1\leqq\theta\leqq1$ における最大値 M および最小値 m を求めよ。

(2) (1)で求めた M に対し、次の不等式を示せ。 $\dfrac{7}{8}\pi\leqq\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx\leqq\dfrac{7}{8}\pi+4\mathrm{M}$

□2 n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合
$\{(x,y)\mid x,y$ は $1\leqq x\leqq3,\ 1\leqq y\leqq n$ を満たす整数$\}$
から相異なる3点を選ぶ。ただし、どの3点も等確率で選ばれるものとする。
選んだ3点が三角形の3頂点となる確率を p_n とする。

(1) p_5 を求めよ。

(2) m を2以上の整数とする。p_{2m} を求めよ。

□3 座標空間内の原点を中心とする半径5の球面を S とする。S 上の相異なる3点 P,Q,R が次の条件を満たすように動く。

条件：P,Q は xy 平面上にあり、三角形 PQR の重心は G(2,0,1) である。

以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の中点 M の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2) 線分 PQ が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

□4 k を実数とし、座標平面上の曲線 C を $y=x^3-kx$ で定める。C 上の2点 P,Q に対する以下の条件 (*) を考える。

条件 (*)　原点O,点P,点Q は相異なり、C の O,P,Q における接線のうち、どの2本も交わり、そのなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる。

ただし、2直線のなす角は 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下の範囲で考えるものとする。

(1) 条件 (*) を満たす P,Q が存在するような k の範囲を求めよ。

(2) k が(1)で定まる範囲にあるとする。P,Q が条件 (*) を満たすように動くとき、C の O,P,Q における接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M, 最小値を m とおく。ただし、3本の接線が1点で交わるときは S=0 とする。M=4m となる k の値を求めよ。

□5 複素数平面上の原点を中心とする半径1の円を C とする。複素数 α と C 上の点 P(z) に対し、$w=(z-\alpha)^3$ とおく。P が C 上を動くときの点 Q(w) の軌跡を D とする。

(1) $\alpha=-3$ とし、w の偏角を θ とおく。P が C 上を動くとき、$\sin\theta$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) α が次の条件を満たすように動く。

条件：D は実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点を持つ。

複素数平面上の点 R(α) が動きうる範囲の面積を求めよ。

□6 n を正の整数とする。n の正の約数のうち、3で割って1余るものの個数を $f(n)$, 3で割って2余るものの個数を $g(n)$ とする。

(1) $f(2800)$, $g(2800)$ を求めよ。

(2) $f(n)\geqq g(n)$を示せ。

(3) $g(n)=15$ であるとき、$f(n)$ がとりうる値を求めよ。

[1] (1) $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ より

$f'(\theta)=\cos\theta-1+\dfrac{\theta^2}{2}$, $f''(\theta)=-\sin\theta+\theta$,

$f^{(3)}(\theta)=-\cos+1$. よって $f^{(3)}(\theta)\geqq 0$ (等号成立は $\theta=2k\pi$ (k ; 整数) のとき) で $f''(\theta)$ は単調増加。さらに $f''(0)=0$ より $\theta<0$ のとき $f''(\theta)<0$ で $f'(\theta)$ は減少し、$\theta>0$ のとき $f''(\theta)>0$ で $f'(\theta)$ は増加する。つまり $f(\theta)$ は単調増加するので $-1\leqq\theta\leqq1$ における最大値は $\mathrm{M}=f(1)=\sin1-\dfrac{5}{6}$,

最小値は $\mathrm{m}=f(-1)=\dfrac{5}{6}-\sin1$.

θ		0	
$f'(\theta)$	+	0	+
$f(\theta)$	↗		↗

(2) $\mathrm{I}:=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)dx$

$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\{\sin(\cos x)\cos x-\cos(\cos x)\sin x\}dx$

$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx-\int_0^{2\pi}\cos(\cos x)\sin x\,dx$ …①

$\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx$, $\mathrm{K}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(\cos x)\sin x\,dx$

とおく。K において $t=\cos x$ とおくと

$dt=-\sin x\,dx$. $\therefore \mathrm{K}=\displaystyle\int_1^1\cos t(-dt)=0$ …②

x	$0\to2\pi$
t	$1\to1$

また $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(\cos x)\cos dx$

$+\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sin(\cos x)\cos x\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx$③

であり、(1)の結果

$0\leqq\theta\leqq1$ のとき $0\leqq\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}\leqq\mathrm{M}$

$\Leftrightarrow\ \theta-\dfrac{\theta^3}{6}\leqq\sin\theta\leqq\theta-\dfrac{\theta^3}{6}+\mathrm{M}$,

$-1\leqq\theta\leqq0$ のとき $-\mathrm{M}\leqq\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}\leqq0$

$\Leftrightarrow\ \theta-\dfrac{\theta^3}{6}-\mathrm{M}\leqq\sin\theta\leqq\theta-\dfrac{\theta^3}{6}$

を $\theta=\cos x$ に対し適用すると

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}\leqq x\leqq2\pi$ のとき

$\cos x-\dfrac{\cos^3x}{6}\leqq\sin(\cos x)\leqq\cos x-\dfrac{\cos^3x}{6}+\mathrm{M}$

$\therefore\cos^2x-\dfrac{\cos^4x}{6}\leqq\sin(\cos x)\cos x$

$\leqq\cos^2x-\dfrac{\cos^4x}{6}+\mathrm{M}\cos x$ …④

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{2}$ のとき

$\cos x-\dfrac{\cos^3x}{6}-\mathrm{M}\leqq\sin(\cos x)\leqq\cos x-\dfrac{\cos^3x}{6}$

$\therefore\cos^2x-\dfrac{\cos^4x}{6}\leqq\sin(\cos x)\cos x$

$\leqq\cos^2x-\dfrac{\cos^4x}{6}-\mathrm{M}\cos x$ …⑤

③,④,⑤より

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\cos^2x-\frac{\cos^4x}{6}\right)dx\leqq\mathrm{J}\leqq\int_0^{2\pi}\left(\cos^2x-\frac{\cos^4x}{6}\right)dx$

$+\mathrm{M}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\,dx\right)$…⑥

ここで $\cos^2x-\dfrac{\cos^4x}{6}=\dfrac{1+\cos2x}{2}-\dfrac{(1+\cos2x)^2}{24}$

$=\dfrac{11+10\cos2x-\cos^22x}{24}=\dfrac{11+10\cos2x}{24}-\dfrac{1+\cos4x}{48}$

$=\dfrac{21+20\cos2x-\cos4x}{48}$.

$\therefore\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\cos^2x-\frac{\cos^4x}{6}\right)dx$

$=\left[\dfrac{7x}{16}+\dfrac{5\sin2x}{24}-\dfrac{\sin4x}{192}\right]_0^{2\pi}=\dfrac{7}{8}\pi$ …⑦

$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\,dx$

$=[\sin x]_0^{\pi/2}+[\sin x]_{3\pi/2}^{\pi/2}+[\sin x]_{3\pi/2}^{2\pi}$

$=(1-0)+\{1-(-1)\}+\{0-(-1)\}=4$ …⑧

⑥,⑦,⑧より $\dfrac{7}{8}\pi\leqq\mathrm{J}\leqq\dfrac{7}{8}\pi+4\mathrm{M}$ …⑨

①,②,⑨より $\dfrac{7}{8}\pi\leqq\mathrm{I}\leqq\dfrac{7}{8}\pi+4\mathrm{M}$.

[2] (1),(2) 共に余事象を考える。

(1) 3×5=15 個の点から3つを選ぶ方法は ${}_{15}\mathrm{C}_3$ =455 通り。それらが一直線上に並ぶのは3点が

(i) 直線 $x=k$ (k=1,2,3) 上にある ${}_5\mathrm{C}_3\times3=30$ 通り。

(ii) 直線 $y=\ell$ (ℓ=1,‥,5) 上にある ${}_3\mathrm{C}_3\times5=5$ 通り。

(iii) 傾きが1の直線上にある : {(1,1),(2,2),(3,3)}, {(1,2),(2,3),(3,4)},{(1,3),(2,4),(3,5)} の3通り,
傾きが2の直線上にある : {(1,1),(2,3),(3,5)},
傾きが -1,-2 の直線上にある3点もそれぞれ3通り, 1通りずつあるので、計8通り。

$\therefore p_5=1-\dfrac{30+5+8}{455}=\dfrac{412}{455}$.

(2) $3n=6m$ 個の点から3つを選ぶ方法は
${}_{6m}\mathrm{C}_3=m(6m-1)(6m-2)$ 通り。
それらが一直線上に並ぶのは3点が

(ア) 直線 $x=k$ (k=1,2,3) 上にある
${}_{2m}\mathrm{C}_3\times3=m(2m-1)(2m-2)$ 通り。

(イ) 直線 $y=\ell$ (ℓ=1,…,$2m$) 上にある
${}_3\mathrm{C}_3\times2m=2m$ 通り。

(ウ) 傾き t (t=1,…,$m-1$) の直線上にある
{(1,1),(2,t+1),(3,2t+1)},…,
{(1,2m−2t),(2,2m−t),(3,2m)} の ($2m-2t$)通り。
傾き $-t$ の直線上にある場合も同様であるから
計 $\displaystyle\sum_{t=1}^{m-1}2\cdot(2m-2t)=4\sum_{s=1}^{m-1}s=2m(m-1)$ 通り。

$\therefore p_{2m}=1-\dfrac{m(2m-1)(2m-2)+2m+2m(m-1)}{m(6m-1)(6m-2)}$

$=\dfrac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}$.

3 (1) $P(x_P,y_P,0)$, $Q(x_Q,y_Q,0)$, $R(x_R,y_R,z_R)$ とおくと、△PQR の重心は

$G(\frac{x_P+x_Q+x_R}{3},\frac{y_P+y_Q+y_R}{3},\frac{z_R}{3})$ で、これが

$(2,0,1)$ と一致することから

$x_P+x_Q+x_R=6$ …①, $y_P+y_Q+y_R=0$ …②, $z_R=3$ …③

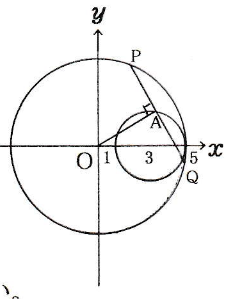
$M(x,y)$ とおくと $(x,y)=(\frac{x_P+x_Q}{2},\frac{y_P+y_Q}{2})$

$\Leftrightarrow (x_P+x_Q,y_P+y_Q)=(2x,2y)$

$\therefore$ ① $\Leftrightarrow x_R=6-2x$ …①', ② $\Leftrightarrow y_R=-2y$ …②'

ここで $R\in S$ より $x_R^2+y_R^2+z_R^2=25$ で、③と合わせると

$x_R^2+y_R^2=16$ …④



①',②'を④に代入すると

$(6-2x)^2+(-2y)^2=16$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=4$ …⑤

ここで P,Q は $S\cap(xy平面)$,

つまり円C : $x^2+y^2=25$ 上の

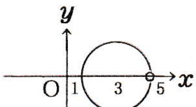
相異なる2点であるから中点

M は C の内部にある。

よって⑤のうち、C上の点

$(5,0)$ は M の軌跡に含まれない。

逆に⑤上の $(5,0)$ 以外の任意の点 A に対し、A を通り OA に垂直な直線は C と2点で交わり、それらを P,Q とすると PQ の中点は A で①～③により R も1通りに定まる。



以上より M の軌跡は円⑤から

$(5,0)$ を除いたもので、右図。

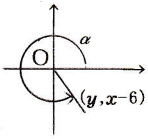
(2) (1)より $M(3+2\cos\theta,2\sin\theta)$

$(0<\theta<2\pi)$ と表され、このとき線分 PQ は直線

$(3+2\cos\theta,2\sin\theta)\cdot(x-3-2\cos\theta,y-2\sin\theta)=0$

$\Leftrightarrow (3+2\cos\theta)x+(2\sin\theta)y-(13+12\cos\theta)=0$ …⑥

の、円 C およびその内部 D : $x^2+y^2\leqq 25$ に含まれる部分である。D 内の点 (x,y) に対し



⑥ $\Leftrightarrow 2y\sin\theta+2(x-6)\cos\theta=13-3x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{y^2+(x-6)^2}\sin(\theta+\alpha)=13-3x$

(α は右図の角) が $0<\theta<2\pi$ に解をもつための条件を考える。

(i) $y=0$ のとき ⑥ $\Leftrightarrow x=\frac{13+12\cos\theta}{3+2\cos\theta}=6-\frac{5}{3+2\cos\theta}$,

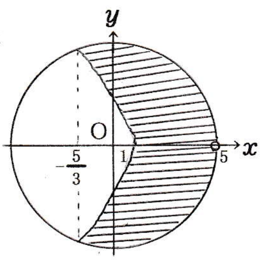
$-1\leqq\cos\theta<1$, のとり得る値の範囲は $1\leqq x<5$.

(ii) $y\neq 0$ のとき⑥が解をもつための条件は

$\frac{|13-3x|}{2\sqrt{y^2+(x-6)^2}}\leqq 1 \Leftrightarrow |13-3x|\leqq 2\sqrt{y^2+(x-6)^2}$

$\Leftrightarrow (13-3x)^2\leqq 4\{y^2+(x-6)^2\}$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}\leqq 1$



以上より、線分 PQ の通過する範囲は右の斜線部。

境界は $(5,0)$ のみ除く。

4 (1) $(x^3-kx)'=3x^2-k$ より $x=t$ (定数) における C の接線は傾き $3t^2-k$ をもち y軸に平行でない。

特に O における接線 ℓ の傾きは $-k$ で、ℓ と x軸の正の向きのなす角を θ とすると $\tan\theta=-k$.

P,Q の x座標をそれぞれ p,q とすると、これらの点での C の接線の傾きは

$3p^2-k=\tan(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{3}}$ …①,

$3q^2-k=\tan(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{3}}$ …②

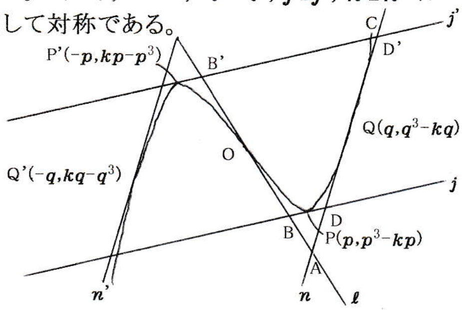
① $\Leftrightarrow 3p^2=k+\frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}=\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{1+\sqrt{3}k}$,

② $\Leftrightarrow 3q^2=k+\frac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}=\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{\sqrt{3}k-1}$

を満たす 0 以外の実数が存在するための条件は

$1+\sqrt{3}k>0$ かつ $\sqrt{3}k-1>0$, つまり $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$ …③

(2) ③の下で $p^2<q^2$. $p>0$, $q>0$ の場合、下図を得る。C自身, PとP', QとQ', jとj', nとn' はOに関して対称である。



$M=\triangle AB'D'$, $m=\triangle ABD$ で、いずれも正三角形なので $M=4m \Leftrightarrow AB'=2AB$ …④

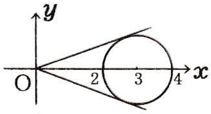
A は $\ell : y=-kx$ と $n : y=(3q^2-k)(x-q)+q^3-kq$ の交点なので x座標は $\frac{2q}{3}$. 同様に B,B' の x座標はそれぞれ $\frac{2p}{3},-\frac{2p}{3}$ であるから、

④ $\Leftrightarrow \frac{2q}{3}-(-\frac{2p}{3})=2(\frac{2q}{3}-\frac{2p}{3}) \Leftrightarrow q=3p$

$\underset{q>p>0}{\Leftrightarrow} q^2=9p^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{3(\sqrt{3}k-1)}=\frac{3\sqrt{3}(k^2+1)}{1+\sqrt{3}k}$

$\Leftrightarrow 9(\sqrt{3}k-1)=1+\sqrt{3}k \Leftrightarrow k=\frac{5\sqrt{3}}{12}$ (③を満たす)

⑤ (1) $\alpha=-3$ で z が C 上を動くとき $v=z-\alpha=z+3$ は3を中心とする半径1の円周上を動く。右図より、$\sin\beta=\frac{1}{3}$ により鋭角を定めると



$-\beta\leqq\arg v\leqq\beta$. $w=v^3$ とド・モアブルの定理より

$-3\beta\leqq\theta=\arg w\leqq3\beta$.

$\sin\beta<\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$ より $\beta<\frac{\pi}{6}$ で 3β も鋭角であるから、$-\sin3\beta\leqq\sin\theta\leqq\sin3\beta$

$\Leftrightarrow 4\sin^3\beta-3\sin\beta\leqq\sin\theta\leqq3\sin\beta-4\sin^3\beta$

$\Leftrightarrow -\frac{23}{27}\leqq\sin\theta\leqq\frac{23}{27}$.

(2) $|z|=1$, $v=z-\alpha$ より $|v+\alpha|=1$ で、v は $-\alpha$ を中心とする半径1の円C'上を動く。$w=v^3$ の軌跡 D が実軸の正の部分，負の部分と共有点をもつような $-\alpha$ の存在範囲を求める。

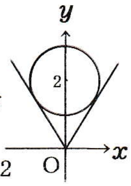
$|-\alpha|<1$ のとき OはC'の内部にあり、C'上に正,負の実数が存在する。これらの3乗はそれぞれ正,負であるから、$-\alpha$ は条件を満たす。

以下、$|-\alpha|\geqq1$の場合を考え、$-\alpha$の偏角をγ, $-\alpha=x+iy$ (x,y は実数) とおく。このとき

$\cos\gamma=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\gamma=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

また $|-\alpha|>1$ の場合、鋭角 δ を $\sin\delta=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ により定めると、$\cos\delta=\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(i) $x=0$, $|y|\geqq1$ のとき



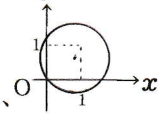
$y=2$ のときC'上の点の偏角は$\frac{\pi}{3}$から$\frac{2\pi}{3}$の間のすべての値をとり、このとき w が正,負となることが1度ずつある。

$y>2$ の場合は条件を満たさず、$1\leqq y<2$ の場合は条件を満たす。

同様に $y<-2$ の場合は条件を満たさず、$-2\leqq y\leqq-1$ の場合は条件を満たす。

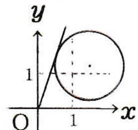
(ii) $x>0$, $y\geqq0$ のとき

(ア) $x\leqq1$, $y\leqq1$ のとき



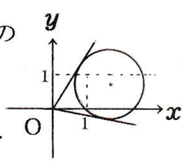
C'上に偏角が $0,\frac{\pi}{3}$ の点が存在し、これらの3乗は正,負となるので条件を満たす。

(イ) $x>1$, $y>1$ のとき



偏角のとりうる値の範囲を考えるとC'上の点で3乗して正数となるものは存在しない。よって条件を満たさない。

(ウ) $x>1$, $y\leqq1$ のとき



C'上に正数が存在し、C'上の点の偏角の最大値は $\gamma+\delta$ (鋭角), 最小値は $\gamma-\delta$. 求める条件は

$\gamma+\delta\geqq\frac{\pi}{3}$ または $\gamma-\delta\leqq-\frac{\pi}{3}$

であるが、後者は前者の十分条件。

つまり、$\gamma+\delta\geqq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\sin(\gamma+\delta)\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Leftrightarrow \frac{y\sqrt{x^2+y^2-1}+x}{x^2+y^2}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ …①

$\Leftrightarrow 2y\sqrt{x^2+y^2-1}\geqq\sqrt{3}(x^2+y^2)-2x$ …①'

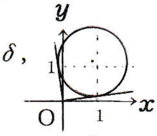
(①'の右辺)$\leqq0$ となる $(x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+y^2\leqq\frac{1}{3}$ …② の場合、①は確かに成り立つ。

①'の右辺が正のとき ①' $\Leftrightarrow$

$4y^2(x^2+y^2-1)\geqq3(x^2+y^2)^2-4\sqrt{3}x(x^2+y^2)+4x^2$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)\{y^2-(\sqrt{3}x-2)^2\}\geqq0 \Leftrightarrow y\geqq|\sqrt{3}x-2|$.

(エ) $x\leqq1$, $y>1$ のとき



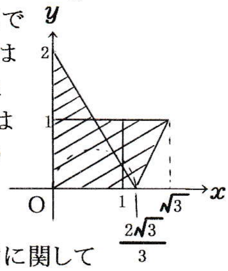
C'上の点の偏角の最小値は $\gamma-\delta$, 最大値は $\gamma+\delta$ で、$0<\gamma-\delta<\frac{\pi}{2}\leqq\gamma+\delta<\pi$.

求める条件は $\gamma-\delta\leqq\frac{\pi}{3}$ かつ $\gamma+\delta\geqq\frac{2\pi}{3}$ であるが、前者は後者の必要条件。つまり、

$\gamma+\delta\geqq\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\sin(\gamma+\delta)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)\{y^2-(\sqrt{3}x-2)^2\}\leqq0 \Leftrightarrow y\leqq2-\sqrt{3}x$ …③

(ア)～(エ)より (ii) の範囲で条件を満たす $-\alpha$ の集合は右の斜線部(境界は虚軸上の点のみ除く)。その面積は底辺$\sqrt{3}$, 高さ1の長方形の面積$\sqrt{3}$に等しい。



(iii) $x>0$, $y\leqq0$ のとき

C' は(ii)で考えた円を実軸に関して対称移動したものである。

$v=X+iY$ (X,Y は実数) とおくと $\bar{v}=X-iY$ で

$v^3=(X^3-3XY^2)+i(3X^2Y-Y^3)$ …④

$(\bar{v})^3=(X^3-3XY^2)-i(3X^2Y-Y^3)$

よって v^3 が正(負)の実数であることと、$(\bar{v})^3$ が正(負)の実数であることは同値。従って $-\alpha$ の存在範囲は(ii)の領域を実軸に関して対称移動したもの。

(iv) $x<0$, $y\geqq0$ のとき

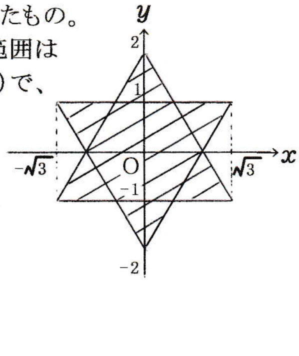
C' は(ii)で考えた円を虚軸に関して対称移動したものである。$v=X+iY$ に対し $v'=-X+iY$ とおくと

$(v')^3=-(X^3-3XY^2)+i(3X^2Y-Y^3)$ …⑤

④,⑤より v^3 が正(負)の実数であることと、$(v')^3$ が負(正)の実数であることは同値。よって $-\alpha$ の存在範囲は(ii)の領域を虚軸に関して対称移動したもの。

(v) $x<0$, $y\leqq0$ のとき $-\alpha$ の存在範囲は(iv) の領域を実軸に関して対称移動したもの。

(i)～(v)より $-\alpha$ の存在範囲は右の斜線部（境界を含む）で、これは α の存在範囲でもある。その面積は $4\cdot\underset{\text{(ii)}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$.



6 以下、3を法とする。

(1) $2800=2^4\times5^2\times7$ の正の約数は $2^a\cdot5^b\cdot7^c$ (ただし a,b,c は整数で $0\leqq a\leqq4$, $0\leqq b\leqq2$, $0\leqq c\leqq1$) と表される。

$2^a\equiv\begin{cases}1\ (a=0,2,4)\\2\ (a=1,3)\end{cases}$, $5^b\equiv\begin{cases}1\ (b=0,2)\\2\ (b=1)\end{cases}$, $7^c\equiv1$

に注意すると $2^a\cdot5^b\cdot7^c\equiv1$ となるのは $(2^a,5^b)\equiv(1,1)$ または $(2,2)$ となる場合で

$f(2800)=\underset{a}{3}\times\underset{b}{2}\times\underset{c}{2}+\underset{a}{2}\times\underset{b}{1}\times\underset{c}{2}=16$.

$2^a\cdot5^b\cdot7^c\equiv2$ となるのは $(2^a,5^b)\equiv(1,2)$ または $(2,1)$ となる場合で

$g(2800)=\underset{a}{3}\times\underset{b}{1}\times\underset{c}{2}+\underset{a}{2}\times\underset{b}{2}\times\underset{c}{2}=14$

(2) 任意の自然数 n は $n=3^km$ (k は0以上の整数, m は3で割り切れない自然数) と表され、n の任意の正の約数は $3^dm'$ (d は0以上 k 以下の整数, m' は m の正の約数) と1通りに表されるので、$f(n)=f(m)$, $g(n)=g(m)$. つまり $f(n)$, $g(n)$ に関しては n が3で割り切れない場合を考えればよい。

一般に、n の任意の正の約数 n' に対し $\dfrac{n}{n'}$ も n の正の約数であることに注意する。

(I) $n\equiv2$ のとき n は平方数でない。($\because t\equiv1,2$ のとき $t^2\equiv1$) よって n' と $\dfrac{n}{n'}$ は相異なる。

また一方は3で割ると1余り、他方は2余る。

$\therefore f(n)=g(n)$.

(II) $n\equiv1$ のとき

(i) 3で割ると2余る素因数を n がもたないとき n の全ての正の約数は3で割ると1余る。

$\therefore f(n)>g(n)=0$.

(ii) 3で割ると2余る素因数 p を n がもつとき $n=p^\ell s$ (ℓ は自然数, s は p で割り切れない自然数) と表される。

(ii-1) ℓ が奇数のとき $p^\ell\equiv2$ なので $s\equiv2$.

(I)より $f(s)=g(s)$ で、p^ℓ の正の約数のうち

3で割ると1余るのは $p^0,p^2,\cdots,p^{\ell-1}$ の $\dfrac{\ell+1}{2}$ 個,

3で割ると2余るのは $p^1,p^3,\cdots,p^\ell$ の $\dfrac{\ell+1}{2}$ 個。

$\therefore f(n)=\dfrac{\ell+1}{2}f(s)+\dfrac{\ell+1}{2}g(s)=g(n)$.

(ii-2) ℓ が偶数のとき n に関する帰納法で示す。

$p^\ell\equiv1$ より $s\equiv1$. 帰納法の仮定により $f(s)\geqq g(s)$.

また p^ℓ の正の約数のうち

3で割ると1余るのは $p^0,p^2,\cdots,p^\ell$ の $\dfrac{\ell+2}{2}$ 個,

3で割ると2余るのは $p^1,p^3,\cdots,p^{\ell-1}$ の $\dfrac{\ell}{2}$ 個。

$\therefore f(n)=\dfrac{\ell+2}{2}f(s)+\dfrac{\ell}{2}g(s)$,

$g(n)=\dfrac{\ell+2}{2}g(s)+\dfrac{\ell}{2}f(s)$.

$\therefore f(n)-g(n)=f(s)-g(s)\geqq0\Leftrightarrow f(n)\geqq g(n)$.

(3) $g(n)=15$ のとき (II)(i)は起こらない。

(I)および(II)(ii-1)のとき $f(n)=15$ で例えば $n=2^{29}$.

(II)(ii-2)のとき $g(n)=\dfrac{\ell}{2}f(s)+\dfrac{\ell+2}{2}g(s)=15$ …①

$f(n)=\dfrac{\ell+2}{2}f(s)+\dfrac{\ell}{2}g(s)$ …②

①および $f(s)\geqq g(s)\geqq0$ を満たす整数 $f(s)$, $g(s)$ と②から定まる $f(n)$ は次のいずれか。

(ア) $\ell=2$ のとき

	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	ⓔ	ⓕ
$f(s)$	15	13	11	9	7	5
$g(s)$	0	1	2	3	4	5
$f(n)$	30	27	24	21	18	15

$f(s)$, $g(s)$ が共に奇数ならば

$s=(3\text{で割ると}1\text{余る数})^2=(3\text{で割ると}2\text{余る数})^2$

となり矛盾を生じる。つまりⓑ,ⓓ,ⓕは起こらない。

ⓒのとき s の正の約数は13個なので $s=q^{12}$ (q は3で割ると2余る素数) と表されることになるが、このとき $f(s)=7$, $g(s)=6$ であるからⓒも起こらない。

同様にⓔも起こらない。

ⓐの場合として $n=2^2\times7^{14}$ がある。

(イ) $\ell\geqq4$ のとき

	ⓖ	ⓗ	ⓘ	ⓙ	ⓚ	ⓛ
ℓ	4	4	6	10	14	30
$f(s)$	6	3	5	3	1	1
$g(s)$	1	3	0	0	1	0
$f(n)$	20	15	20	18	15	16

ⓖはⓒと同様の理由で、ⓗ,ⓚはⓑと同様の理由で起こらない。ⓘは $n=2^6\times7^4$, ⓙは $n=2^{10}\times7^2$, ⓛは $n=2^{30}$ の例がある。

以上より $f(n)$ のとりうる値は 15,16,18,20,30.

2025年度 東京大学 前期 理系数学（150分）

1 座標平面上の点 A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0) を考える。実数 $0<t<1$ に対して、線分 AB, BC, CD を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t, Q_t, R_t とし、線分 P_tQ_t, Q_tR_t を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t, T_t とする。さらに、線分 S_tT_t を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする。
また点 A を U_0, 点 D を U_1 とする。

(1) 点 U_t の座標を求めよ。

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と、線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) a を $0<a<1$ を満たす実数とする。t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを、a の多項式の形で求めよ。

2 (1) $x>0$ のとき、不等式 $\log x \leqq x-1$ を示せ。

(2) 次の極限を求めよ。$\displaystyle \lim_{n \to \infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$

3 平行四辺形 ABCD において、$\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$, AB$=a$, BC$=b$, $a \leqq b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え、その面積を S とする。
条件：点 A, B, C, D はそれぞれ辺 EF, FG, GH, HE 上にある。
ただし、辺はその両端の点も含むものとする。

(1) $\angle \mathrm{BCG} = \theta$ とするとき、S を a, b, θ を用いて表せ。

(2) S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ。

4 この問いでは、0 以上の整数の2乗になる数を平方数と呼ぶ。a を正の整数とし、$f_a(x)=x^2+x-a$ とおく。

(1) n を正の整数とする。$f_a(n)$ が平方数ならば、$n \leqq a$ であることを示せ。

(2) $f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく。次の条件 (i), (ii) が同値であることを示せ。
(i) $N_a=1$ である。
(ii) $4a+1$ は素数である。

5 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各1枚ずつ合計 n 枚あり、横一列におかれている。1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して、次の操作 (T_i) を考える。
(T_i) 左から i 番目の札の数字が、左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ、これら2枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ、札の位置をかえない。
最初の状態において札の数字は左から $A_1, A_2, \cdots, A_n$ であったとする。この状態から $(n-1)$ 回の操作 $(T_1), (T_2), \cdots, (T_{n-1})$ を順に行った後、続けて $(n-1)$ 回の操作 $(T_{n-1}), \cdots, (T_2), (T_1)$ を順に行ったところ、札の数字は左から $1, 2, \cdots, n$ と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

(1) A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。

(2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の総数を C_n とする。n が 4 以上の整数であるとき、C_n を C_{n-1} と C_{n-2} を用いて表せ。

6 複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

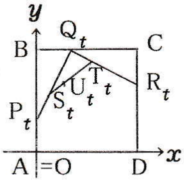
(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し、$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。

(2) α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき、$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3) γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき、$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

2025年度 東京大学 前期 理系数学 ＜解答＞

1 (1) まず $P_t(0,t)$, $Q_t(t,1)$, $R_t(1,1-t)$ であり、次に



$\overrightarrow{OS_t}=(1-t)\overrightarrow{OP_t}+t\overrightarrow{OQ_t}$

$=(0,t(1-t))+(t^2,t)=(t^2,2t-t^2)$,

$\overrightarrow{OT_t}=(1-t)\overrightarrow{OQ_t}+t\overrightarrow{OR_t}$

$=(t(1-t),1-t)+(t,t(1-t))=(2t-t^2,1-t^2)$,

$\overrightarrow{OU_t}=(1-t)\overrightarrow{OS_t}+t\overrightarrow{OT_t}$

$=(t^2(1-t),(1-t)(2t-t^2))+(t(2t-t^2),t(1-t^2))$

$=(3t^2-2t^3,3t-3t^2)$.　∴$U_t(3t^2-2t^3,3t-3t^2)$.

(2) $(x,y)=(3t^2-2t^3,3t-3t^2)$, $0\leqq t\leqq 1$ とおくと

$\frac{dx}{dt}=6t-6t^2=6t(1-t)$,

$\frac{dy}{dt}=3-6t$ より右表および右下のグラフを得る。

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$\frac{dx}{dt}$		+		+	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	−	
$\binom{x}{y}$	$\binom{0}{0}$	↗	$\binom{1/2}{3/4}$	↘	$\binom{1}{0}$

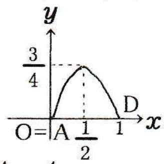
よって求める面積は $S=\int_0^1 y\,dx$ であり、

$x=3t^2-2t^3$ とおくと

$dx=(6t-6t^2)dt$,

x	$0\to1$
t	$0\to1$

$y=3t-3t^2$ および



$\therefore S=\int_0^1(3t-3t^2)(6t-6t^2)dt$

$=18\int_0^1(t^2-2t^3+t^4)dt=18[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^4}{5}]_0^1=\frac{3}{5}$.

(3) 求める曲線の長さは

$\int_0^a\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$

$=\int_0^a\sqrt{36t^2(1-t)^2+(3-6t)^2}\,dt$

$=3\int_0^a\sqrt{4t^4-8t^3+8t^2-4t+1}\,dt$

$=3\int_0^a(2t^2-2t+1)dt$ ($\because 2t^2-2t+1=2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}>0$)

$=[2t^3-3t^2+3t]_0^a=2a^3-3a^2+3a$.

2 (1) $f(x)=\log x-(x-1)$, $x>0$, とおくと、

$f'(x)=\frac{1}{x}-1$ より右の増減表を得る。よって $f(x)\leqq f(1)=0$, つまり $\log x\leqq x-1$.

x	(0)		1	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗		↘

(2) $I=\int_1^2\log(\frac{1+x^{1/n}}{2})dx$ とおくと (1) より

$\log\frac{1+x^{1/n}}{2}\leqq\frac{1+x^{1/n}}{2}-1=\frac{x^{1/n}-1}{2}$.

$\therefore I\leqq\int_1^2\frac{x^{1/n}-1}{2}dx=\frac{1}{2}[\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}-x]_1^2$

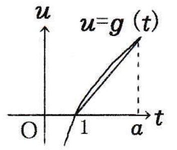
$=\frac{1}{2}\{\frac{n}{n+1}(2^{\frac{n+1}{n}}-1)-1\}=\frac{n}{n+1}2^{1/n}-\frac{2n+1}{2(n+1)}$.

$\therefore nI\leqq\frac{n}{n+1}(n\cdot 2^{1/n}-\frac{2n+1}{2})=\frac{n}{n+1}(\frac{2^{1/n}-1}{1/n}-\frac{1}{2})$ ①

また $g(t)=\log t$ $(t>0)$ とおくと

$g'(t)=\frac{1}{t}$, $g''(t)=-\frac{1}{t^2}<0$ より

$u=g(t)$ のグラフは上に凸で、(1,0) と $(a,\log a)$ $(a>1)$ を結ぶ線分の上方にある。



つまり $1\leqq t\leqq a$ のとき $\log t\geqq\frac{\log a}{a-1}(t-1)$ …②

$1\leqq x\leqq 2$ のとき $1\leqq\frac{1+x^{1/n}}{2}\leqq\frac{1+2^{1/n}}{2}$ が成り立ち

②で $t=\frac{1+x^{1/n}}{2}$, $a=\frac{1+2^{1/n}}{2}$ とおくと

$$\log\frac{1+x^{1/n}}{2}\geqq\frac{\log\frac{1+2^{1/n}}{2}}{\frac{2^{1/n}-1}{2}}\cdot\frac{x^{1/n}-1}{2}.$$

$$\therefore I\geqq\frac{\log\frac{1+2^{1/n}}{2}}{\frac{2^{1/n}-1}{2}}\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}dx$$

$$=\frac{\log\frac{1+2^{1/n}}{2}}{\frac{2^{1/n}-1}{2}}(\frac{n}{n+1}2^{\frac{1}{n}}-\frac{2n+1}{2(n+1)}).$$

$$\therefore nI\geqq\frac{\log\frac{1+2^{1/n}}{2}}{\frac{2^{1/n}-1}{2}}\cdot\frac{n}{n+1}(\frac{2^{1/n}-1}{1/n}-\frac{1}{2})\ \cdots③$$

ここで $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{1/n}-1}{1/n}=\lim_{1/n\to0}\frac{2^{1/n}-2^0}{1/n-0}$

$=\frac{d}{dt}2^t|_{t=0}=2^t\log 2|_{t=0}=\log 2$.

よって $n\to\infty$ のとき (①の右辺)$\to\log 2-\frac{1}{2}$.

さらに $n\to\infty$ のとき $v:=2^{1/n}\to1$ で、

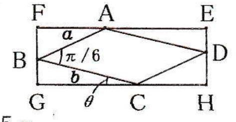
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1+2^{1/n}}{2}}{\frac{2^{1/n}-1}{2}}=\lim_{v\to1}\frac{\log\frac{1+v}{2}}{\frac{v-1}{2}}=\lim_{v\to1}2\frac{\log(1+v)-\log 2}{v-1}$$

$=2\frac{d}{dt}\log(1+t)|_{t=1}=2\cdot\frac{1}{1+t}|_{t=1}=1$.

よって $n\to\infty$ のとき (③の右辺)$\to\log 2-\frac{1}{2}$.

以上より、挟み撃ちの原理から $\lim_{n\to\infty}nI=\log 2-\frac{1}{2}$.

③ (1) ABCD は平行四辺形であるから



$\angle CDA=\angle ABC=\frac{\pi}{6}$,

$\angle BCD=\angle DAB=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

$CD=AB=a,\ DA=BC=b$.

また $\angle BCG=\theta$ より $\angle CBG=\frac{\pi}{2}-\theta$.

$\therefore ABF=\pi-\frac{\pi}{6}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{3}+\theta$.

$\therefore FG=FB+BG=a\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\theta$ …①

同様に $\angle DCH=\pi-\frac{5\pi}{6}-\theta=\frac{\pi}{6}-\theta$,

$GH=GC+CH=b\cos\theta+a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$ …②

$\therefore S=FG\cdot GH$

$\underset{①,②}{=}\left\{a\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\theta\right\}\left\{a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b\cos\theta\right\}$

$=\left\{a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b\sin\theta\right\}\left\{a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b\cos\theta\right\}$

$=a^2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+b^2\sin\theta\cos\theta$

$\quad+ab\left\{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\sin\theta\right\}$

$=\frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{b^2}{2}\sin2\theta+ab\sin\frac{\pi}{6}$

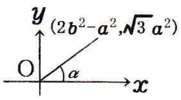
$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+\frac{b^2}{2}\sin2\theta+\frac{ab}{2}$

$=\frac{2b^2-a^2}{4}\sin2\theta+\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cos2\theta+\frac{ab}{2}$.

(2) θ は 0 と $\frac{\pi}{6}$ の間を動き、また(1)より

$S=\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{ab}{2}$,

ただし α は右図の角。



$0<a\leqq b$ より $2b^2-a^2>0$ で、α は鋭角である。$2\theta+\alpha$ は α と $\frac{\pi}{3}+\alpha$ の間を動き、$\frac{\pi}{3}+\alpha\geqq\frac{\pi}{2}$ が成り立つための必要十分条件は

$\alpha\geqq\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\tan\alpha\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}a^2}{2b^2-a^2}\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\quad\Leftrightarrow 3a^2\geqq2b^2-a^2\Leftrightarrow b\leqq\sqrt{2}a$.

従って $a\leqq b\leqq\sqrt{2}a$ のとき S は $\theta=\frac{\pi-2\alpha}{4}$ で最大値 $\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}+ab}{2}$ をとり、

$b>\sqrt{2}a$ のとき S は $\theta=\frac{\pi}{6}$ で最大値 $\frac{\sqrt{3}b^2+2ab}{4}$ をとる。

④ (1) 背理法で示す。

$f_a(n)=n^2+n-a$ が平方数ならば非負整数 m で $n^2+n-a=m^2$ …① を満たすものが存在する。

$n>a$ と仮定すると、①の左辺は n^2 より大きくなるので $m\geqq n+1$. よって①の右辺は $(n+1)^2$ 以上であり、このとき (①の右辺)−(①の左辺)

$\geqq(n+1)^2-(n^2+n-a)=n+a+1>0$,

となり矛盾を生じる。

(2) 自然数 n と非負整数 m が

① $\Leftrightarrow\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m^2=a+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow(2n+2m+1)(2n-2m+1)=4a+1$ …①'

を満たすとき、$4a+1$ は 5 以上の奇数なので

$2n+2m+1,\ 2n-2m+1$ は $2n+2m+1\geqq2n-2m+1$ を満たす正の奇数である。…②

(ii)⇒(i); $4a+1$ が素数ならば、①'と②より

$\begin{cases}2n+2m+1=4a+1\\2n-2m+1=1\end{cases}\Leftrightarrow n=m=a.\ \therefore N_a=1.$

(i)⇒(ii); 対偶を示す。$4a+1$ が素数でなければ $3\leqq p\leqq q$ を満たす奇数 p,q を用いて $4a+1=pq$ と表される。4 を法として p,q は 1 または 3 と合同であり、右表から $(p,q)\equiv(1,1)$ または $(3,3)$ が成り立つ。従って

p mod 4	1	1	3	3
q mod 4	1	3	1	3
pq mod 4	1	3	3	1

$\begin{cases}2n+2m+1=q\\2n-2m+1=p\end{cases}\Leftrightarrow(n,m)=\left(\frac{p+q-2}{4},\frac{q-p}{4}\right)$ は

①'を満たす自然数 n と非負整数 m の組で、(a,a) と異なるので $N_a\geqq2$.

以上、(i)⇔(ii) が示された。

⑤ まず、札 n は一度目の(T_{n-1})後、右端にあり、札 1 は二度目の(T_1)後、左端にある。

(1) 背理法で示す。

$\{A_1,A_2\}=\{k,\ell\}$ $(k>\ell>2)$ ならば一度目の(T_1)後、札の配置は $\ell kA_3\cdots A_n$ になり、札 ℓ は二度目の(T_2)後まで動かず、二度目の(T_1)で札 1 と入れかわる。すなわち、終了時に、左から2番目の札が $\ell\ (>2)$ となり、矛盾を生じる。

(2) (1)より

$\{A_1,A_2\}=\{1,2\}$…①, $\{1,k\}$…②, または $\{2,\ell\}$…③, ただし k,ℓ は 3 以上の整数, が成り立つ。

①の場合 $(A_1,A_2)=(1,2)$ または $(2,1)$ で、一度目の(T_1)後、札の配置は $12A_3\cdots A_n$ となる。

以後 1 と 2 の札は動かず、$A_3\cdots A_n$ の部分が $2(n-3)$ 回の操作(T_3),…,(T_{n-1}),(T_{n-1}),…,(T_3) により $3\cdots n$ に並びかえられる。

よって配置 $A_3\cdots A_n$ は C_{n-2} 通り考えられる。

②の場合 $(\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2)=(1,k)$ または $(k,1)$ で、一度目の(T_1)後、札の配置は $1k\mathrm{A}_3\cdots\mathrm{A}_n$ となる。

以後 1 の札は動かず、$k\mathrm{A}_3\cdots\mathrm{A}_n$ の部分が $2(n-2)$ 回の操作$(\mathrm{T}_2),\cdots,(\mathrm{T}_{n-1}),(\mathrm{T}_{n-1}),\cdots,(\mathrm{T}_2)$により $2\cdots n$ に並びかえられる。よって配置 $k\mathrm{A}_3\cdots\mathrm{A}_n$ は $(\mathrm{C}_{n-1}-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{左端が札 2}}}{\mathrm{C}_{n-2}})$ 通り考えられる。

③の場合 $(\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2)=(2,\ell)$ または $(\ell,2)$ で、一度目の(T_1)後、札の配置は $2\ell\mathrm{A}_3\cdots\mathrm{A}_n$ となる。

以後 2 の札は二度目の(T_2)後まで動かず、$\ell\mathrm{A}_3\cdots\mathrm{A}_n$ の部分が $2(n-2)$ 回の操作$(\mathrm{T}_2),\cdots,(\mathrm{T}_{n-1}),(\mathrm{T}_{n-1}),\cdots,(\mathrm{T}_2)$により $13\cdots n$ に並びかえられる。よって配置 $\ell\mathrm{A}_3\cdots\mathrm{A}_n$ は $(\mathrm{C}_{n-1}-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{左端が札 1}}}{\mathrm{C}_{n-2}})$ 通り考えられる。

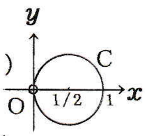
以上より $\mathrm{C}_n=\underset{①}{2\mathrm{C}_{n-2}}+\underset{②}{2(\mathrm{C}_{n-1}-\mathrm{C}_{n-2})}+\underset{③}{2(\mathrm{C}_{n-1}-\mathrm{C}_{n-2})}$
$=4\mathrm{C}_{n-1}-2\mathrm{C}_{n-2}.$

参考 漸化式

$\mathrm{C}_2=2,\ \mathrm{C}_3=6,\ \mathrm{C}_n=4\mathrm{C}_{n-1}-2\mathrm{C}_{n-2}\ (n\geqq 4)$

を解くと $\mathrm{C}_n=\dfrac{(2+\sqrt{2})^{n-1}+(2-\sqrt{2})^{n-1}}{2}\ (n\geqq 2).$

6 (1) $z\in C$ より



$z=\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)+\dfrac{i}{2}\sin\theta\ (-\pi<\theta<\pi)$

とおくことができ、このとき

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\theta}{2}(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2})}$

$=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\theta}{2}}(\cos\dfrac{\theta}{2}-i\sin\dfrac{\theta}{2})=1-i\tan\dfrac{\theta}{2}.$

$\therefore Re\left(\dfrac{1}{z}\right)=1.$

(2) $\alpha,\beta\in C$ のとき、(1) の結果から

$\dfrac{1}{\alpha}=1+ai,\ \dfrac{1}{\beta}=1+bi,\ (a,b$ は実数) とおける。

さらに $-\pi<\theta<\pi$ より $-\tan\dfrac{\theta}{2}$ は任意の実数値をとる。つまり a,b は $a\neq b$ を満たしながら実数全体を動く。

$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=1+2ai-a^2+1+2bi-b^2=(2-a^2-b^2)+2(a+b)i$

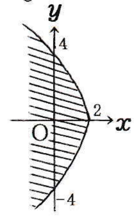
$(x,y)=(2-a^2-b^2,2(a+b))$ とおくと

$ab=\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\dfrac{(\frac{y}{2})^2-(2-x)}{2}=\dfrac{4x+y^2}{8}-1.$

よって a,b は2次方程式 $t^2-\dfrac{y}{2}t+(\dfrac{4x+y^2}{8}-1)=0$ の相異なる2実解で、判別式

$\dfrac{y^2}{4}-4(\dfrac{4x+y^2}{8}-1)>0 \Leftrightarrow x<2-\dfrac{y^2}{8}.$

従って $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲は右の斜線部（境界を除く）。

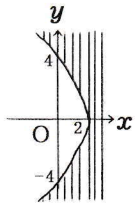


(3) $\gamma=x+yi$ (x,y は実数) とおくと (2) より

$x\geqq 2-\dfrac{y^2}{8}\ \cdots①$

さらに $\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\overline{\gamma}}{\gamma\overline{\gamma}}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ より

$Re\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}.$



$\dfrac{x}{x^2+y^2}$ が最大値をとるとき、$x>0.$

正数 x を固定すると y の動き得る範囲は

$\begin{cases} x\geqq 2 \text{ のときは実数全体} \\ 0<x<2 \text{ のときは } y^2\geqq 16-8x\ (\because ①) \end{cases}$

$Re\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)$ は y^2 に関して減少関数であるから、

$x\geqq 2$ のときは $y=0$ で最大値$\dfrac{1}{x}$をとり、

$0<x<2$ のときは $y=\pm 2\sqrt{4-2x}$ で最大値$\dfrac{x}{(x-4)^2}$をとる。

よって $Re\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)$ の最大値 M は

$\max\{\dfrac{1}{2},\ \max\limits_{0<x<2}\dfrac{x}{(x-4)^2}\}.$

同様に $Re\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)$ の最小値 m は $\min\limits_{x<0}\dfrac{x}{(x-4)^2}.$

$f(x)=\dfrac{x}{(x-4)^2}\ (x<2)$ とおくと

$f'(x)=\dfrac{(x-4)^2-x\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4}=\dfrac{x+4}{(4-x)^3}$ より

右の増減表を得る。

x		-4		(2)
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{16}$	↗	$(\dfrac{1}{2})$

$\therefore M=\dfrac{1}{2}\ (\gamma=2),$

$m=-\dfrac{1}{16}\ (\gamma=-4\pm 4\sqrt{3}i).$

2025年度 東京大学 前期 文系数学 (100分)

1 aを正の実数とする。座標平面において、放物線 C: $y=x^2$ 上の点P(a,a^2) における C の接線と直交し、P を通る直線を ℓ とおく。ℓ と C の交点のうち、P と異なる点を Q とおく。

(1) Q の x 座標を求めよ。

Q における C の接線と直交し、Q を通る直線を m とおく。m と C の交点のうち、Q と異なる点を R とおく。

(2) a がすべての正の実数を動くとき、R の x 座標の最小値を求めよ。

2 平面上で AB=AC=1 である二等辺三角形 ABC を考える。正の実数 r に対し、A,B,C それぞれを中心とする半径 r の円3つを合わせた領域を D_r とする。ただし、この問いでは、三角形と円は周とその内部からなるものとする。辺 AB, AC, BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s, 三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す。

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき、s と t を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき、s と t を求めよ。

(3) $0<\theta<\pi$ を満たす θ に対して、$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ のとき、s と t を θ を用いて表せ。

3 白玉2個が横に並んでいる。投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを用いて、次の手順(*)をくり返し、白玉または黒玉を横一列に並べていく。

手順(*) コインを投げ、表がでたら白玉、裏がでたら黒玉を、それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく。そして、新しくおいた玉の色がその1つ左の玉の色と異なり、かつ2つ左の玉の色と一致するときには、新しくおいた玉の1つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる。

例えば、手順(*)を2回行いコインが裏,表の順にでた場合には、白玉が4つ並ぶ。正の整数 n に対して、手順(*)をn回行った時点での$(n+2)$個の玉の並び方を考える。

(1) $n=3$ のとき、右から2番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(2) n を正の整数とする。右から2番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(3) n を正の整数とする。右から1番目と2番目の玉がともに白玉である確率を求めよ。

4 aを実数とする。座標平面において、次の連立不等式の表す領域の面積を S(a) とする。

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+2 \\ y \geqq |x^2+a| \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

a が $-2 \leqq a < 2$ の範囲を動くとき、S(a) の最大値を求めよ。

1 (1) $(x^2)'=2x$ より、$\mathrm{P}(a,a^2)$ における C の接線の傾きは $2a$. よって ℓ は P を通る傾きが $-\dfrac{1}{2a}$ の直線 : $y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2=-\dfrac{1}{2a}x+\dfrac{1}{2}+a^2$.

C と ℓ の交点の x 座標は $x^2=-\dfrac{1}{2a}x+\dfrac{1}{2}+a^2$

$\Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{2a}x-\dfrac{1}{2}-a^2=(x-a)(x+a+\dfrac{1}{2a})=0$

$\Leftrightarrow x=a,-a-\dfrac{1}{2a}$.

よって点 Q の x 座標は $-a-\dfrac{1}{2a}$.

(2) $b=-a-\dfrac{1}{2a}$ (<0) とおくと、(1) と同様に

m: $y=-\dfrac{1}{2b}x+\dfrac{1}{2}+b^2$.

また点 R の x 座標は $x_{\mathrm{R}}=-b-\dfrac{1}{2b}$.

ここで $a>0$ および相加相乗平均の不等式より

$a+\dfrac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{2a}}=\sqrt{2}$,

等号成立は $a=\dfrac{1}{2a}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき。

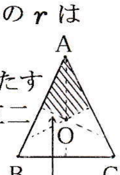
よって $b=-(a+\dfrac{1}{2a})\leqq-\sqrt{2}$ で、等号は $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のときに成立する。

さらに $\dfrac{dx_{\mathrm{R}}}{db}=-1+\dfrac{1}{2b^2}=\dfrac{1-2b^2}{2b^2}$ より $b\leqq-\sqrt{2}$ において $\dfrac{dx_{\mathrm{R}}}{db}<0$ で、この区間で x_{R} は単調に減少する。

従って x_{R} は $b=-\sqrt{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ をとる。

2 まず D_r の任意の点は A,B,C を中心とする半径 r の3つの円の少なくとも1つに含まれることに注意する。また $\mathrm{P}\in\mathrm{D}_r$ を満たす最小の r は PA,PB,PC の最小値である。

さらに PA=PB (PB=PC, PC=PA) を満たす点 P の集合は辺 AB (BC, CA) の垂直二等分線(図では点線で表されている。)



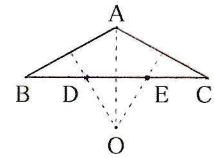
「最も近い頂点が A」である点の集合
この中で A からの距離が最大であるのは外心O

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき △ABC は正三角形。

∂(△ABC) (△ABC の周囲) 上の点で、最も近い頂点からの距離が最大であるのは各辺の中点であり、$s=\dfrac{1}{2}$.

△ABC の点の中では、最も近い頂点からの距離が最大であるのは外心であり、正弦定理より

$t=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



(2) $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{6}$ で、△ABC の点の中で、最も近い頂点からの距離が最大であるのは図の D,E.

$\therefore s=t=\mathrm{BD}$ (=AD=AE=CE).

$\mathrm{BD}\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=\dfrac{1}{2}$ であるから $\mathrm{BD}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore s=t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ のとき $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi-\theta}{2}$.

(i) $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ ならば $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}>\angle\mathrm{BAC}$.

$\therefore$ AB=AC>BC. ∂(△ABC) 上の点で、最も近い頂点からの距離が最大であるのは AB,AC の中点であり、$s=\dfrac{1}{2}$.

△ABC の点の中では、最も近い頂点からの距離が最大であるのは外心であり、正弦定理より

$t=\dfrac{\mathrm{AB}}{2\sin\angle\mathrm{ACB}}=\dfrac{1}{2\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2})}=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$.

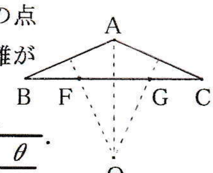
(ii) $\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ならば $\angle\mathrm{BAC}>\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$.

$\therefore$ BC>AB=AC. ∂(△ABC) 上の点で、最も近い頂点からの距離が最大であるのは BC の中点で、

$s=\dfrac{\mathrm{BC}}{2}=\mathrm{AB}\cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2})=\sin\dfrac{\theta}{2}$.

(i) と全く同様に $t=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$.

(iii) $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ならば、△ABCの点の中で、最も近い頂点からの距離が最大であるのは図の F,G.



$\therefore s=t=\mathrm{BF}=\dfrac{\mathrm{AB}/2}{\cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2})}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

(1) および (i)–(iii) より

$$s=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3})\\ \sin\dfrac{\theta}{2} & (\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2})\\ \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} & (\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi)\end{cases},\quad t=\begin{cases}\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} & (0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2})\\ \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} & (\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi)\end{cases}$$

3 (1) コインの表(裏)が出ることを H(T) で表し、白(黒)玉を W(B) で表す。

$n=3$ のとき、次の8通りが考えられ、これらは同様に確からしい。

1回目	2回目	3回目	玉の並び
H	H	H	WWWWWW
H	H	T	WWWWB
H	T	H	WWWWW
H	T	T	WWWBB
T	H	H	WWWWW
T	H	T	WWWWB
T	T	H	WWBBW
T	T	T	WWBBB

よって求める確率は $\frac{5}{8}$.

(2)(3) 手順 (*) を n 回行った後、右から2番目の玉が(右から1番目と2番目の玉がともに)白である確率を p_n (q_n) とおく。

右端の2つの玉は (i) WW, (ii) WB, (iii) BW または (iv) BB であり、手順 (*) を n 回行った後 (i),(ii),(iii),(iv) となる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とおくと

$p_n=a_n+b_n \cdots ①$, $q_n=a_n \cdots ②$, $a_n+b_n+c_n+d_n=1 \cdots ③$,

$a_1=b_1=\frac{1}{2}$, $c_1=d_1=0 \cdots ④$

さらに、手順 (*) を $(n+1)$ 回行った後、右端2つの玉は次のようになる:

n 回後の右端2つの玉 ＼ $(n+1)$ 回目	H	T
(i)	WW	WB
(ii)	WW	BB
(iii)	WW	BB
(iv)	BW	BB

よって $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+c_n) \cdots ⑤$, $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \cdots ⑥$

$c_{n+1}=\frac{1}{2}d_n \cdots ⑦$, $d_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n+d_n)$

③,⑤,⑦より $a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{2}$.

これと④より $n \geqq 1$ に対し $c_n=\frac{1}{2}-a_n \cdots ⑧$

⑤,⑧より $a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+\frac{1}{2}) \cdots ⑨$

⑥+⑨: $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)+\frac{1}{4}$

$\underset{①}{\Leftrightarrow} p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4} \Leftrightarrow p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(p_n-\frac{1}{2})$.

これと①,④より $\{p_n-\frac{1}{2}\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$\therefore p_n-\frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^n \Leftrightarrow p_n=\underbrace{\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^n}_{(2)\text{の解答}} \cdots ⑩$

次に、⑨−⑥: $a_{n+1}-b_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_n-b_n)+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow a_{n+1}-b_{n+1}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}(a_n-b_n-\frac{1}{6})$.

これと④より $\{a_n-b_n-\frac{1}{6}\}$ は初項 $a_1-b_1-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$\therefore a_n-b_n-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1} \Leftrightarrow a_n-b_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n$

これと⑩ $\underset{①}{\Leftrightarrow} a_n+b_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^n$ より

$2a_n=\frac{2}{3}+(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n$

$\underset{②}{\Leftrightarrow} q_n=\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n}_{(3)\text{の解答}}$

$\boxed{4}$

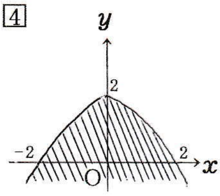


図1

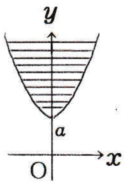


図2

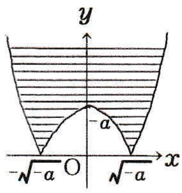


図3

$y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+2$ の表す領域は図1の斜線部で、

$y \geqq |x^2+a|$ の表す領域は $a \geqq 0$ ($a<0$) のとき図2(3)の斜線部である。いずれも y 軸に関して対称である。

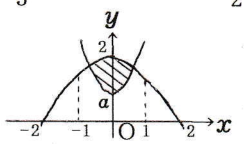
さらに $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$ と $y=x^2+a$ は

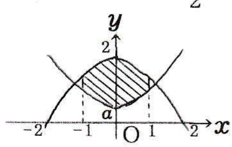
$x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}(2-a)}$ において交わり、$-2 \leqq a<0$

のとき $-\dfrac{1}{2}x^2+2-(-x^2-a)=\dfrac{x^2}{2}+2+a \geqq 0$.

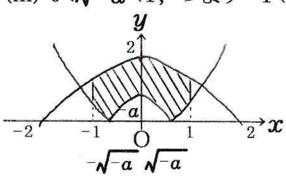
よって題意の領域は次のようになる：

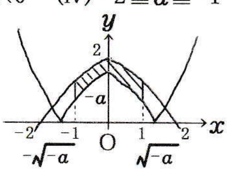
(i) $\dfrac{2}{3}(2-a) \leqq 1$, つまり $\dfrac{1}{2} \leqq a<2$　(ii) $0 \leqq a<\dfrac{1}{2}$





(iii) $0<\sqrt{-a}<1$, つまり $-1<a<0$　(iv) $-2 \leqq a \leqq -1$





(i) のとき $S(a)=\displaystyle\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}(2-a)}}^{\sqrt{\frac{2}{3}(2-a)}}\{-\dfrac{1}{2}x^2+2-(x^2+a)\}dx$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}(2-a)}\right)^3=2\left(\sqrt{\frac{2}{3}(2-a)}\right)^3$$

で、$a=\dfrac{1}{2}$ において最大値 2 をとる。

(ii) のとき $S(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\{-\dfrac{1}{2}x^2+2-(x^2+a)\}dx$

$$=2\int_0^1\left(-\frac{3}{2}x^2+2-a\right)dx=\left[-x^3+(4-2a)x\right]_0^1=3-2a$$

で、$a=0$ において最大値 3 をとる。

(iii) のとき $S(a)=2\displaystyle\int_0^{\sqrt{-a}}\{-\dfrac{1}{2}x^2+2-(-x^2-a)\}dx$

$$+2\int_{\sqrt{-a}}^{1}\{-\frac{1}{2}x^2+2-(x^2+a)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+(4+2a)x\right]_0^{\sqrt{-a}}+\left[-x^3+(4-2a)x\right]_{\sqrt{-a}}^1$$

$$=\frac{8}{3}a\sqrt{-a}-2a+3.$$

$b=\sqrt{-a}$ とおくと $0<b<1$, $S(a)=-\dfrac{8}{3}b^3+2b^2+3$.

$\therefore \dfrac{d}{db}S(a)=-8b^2+4b=4b(1-2b)$

よって右の増減表が得られ

b	(0)		$\frac{1}{2}$		(1)
$\frac{d}{db}S(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗		↘	

$S(a)$ は $b=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{4}$

において最大値 $\dfrac{19}{6}$ をとる。

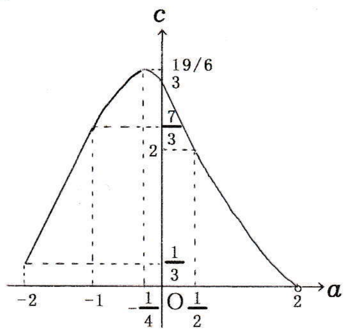
(iv) のとき $S(a)=2\displaystyle\int_0^1\{-\dfrac{1}{2}x^2+2-(-x^2-a)\}dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+(4+2a)x\right]_0^1=2a+\frac{13}{3}$$

で、$a=-1$ において最大値 $\dfrac{7}{3}$ をとる。

(i)〜(iv) より $S(a)$ は $a=-\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{19}{6}$ をとる。

参考　$c=S(a)$ のグラフ



2011年度　灘高等学校（110分）

注意：1，2 (1),(2) は答えのみでよい。それ以外は途中の式や文章も記入すること。

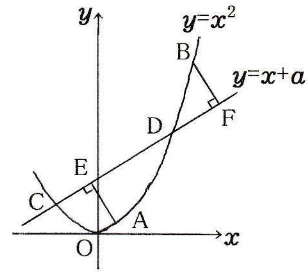
1 次の□内に適する数を記入せよ。

(1) $x=1+\sqrt{2}$, $y=2+\sqrt{3}$, $z=4+\sqrt{6}$ のとき、式 $xyz-4xy-yz-2zx+8x+4y+2z-8$ の値は □ である。

(2) a,b は0でない定数とする。xy 平面上で、2直線 $x+\sqrt{6}y=9\sqrt{2}$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ の交点が、2直線 $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=0$, $\sqrt{6}x+y=8\sqrt{3}$ の交点と一致するとき、$a=$□, $b=$□ である。

(3) a,b は正の整数で、a は奇数, b は素数とする。x の2次方程式 $x^2-ax-b^3=0$ が整数の解をもつとき、$a=$□, $b=$□ である。

(4) xy 平面上に放物線 $y=x^2$ がある。この放物線に2点 A(1,1), B(3,9) をとる。また、右図のように放物線と2点 C,D で交わる直線 ℓ : $y=x+a$ (a は定数) をとり、A,B から直線 ℓ にそれぞれ垂線 AE,BF を引いたとき、AE=BF となるようにする。このとき、$a=$□ であり、線分 CD の長さは □ である。



2 0段目から始まる階段があり、A君は最初この階段の0段目にいる。A君はサイコロ1個を1回投げるごとに、1の目が出ればこの階段を1段上がり、2か3のいずれかの目が出れば2段上がり、4,5,6のいずれかの目が出れば1段下がるものとする。ただし、0段目にいるときに4,5,6のいずれかの目が出た場合にはそのまま0段目に留まるものとする。

(1) A君がサイコロ1個を3回投げたのち、4段目にいるとする。このとき、考えられる3回のサイコロの目の出方は □ 通りである。

(2) A君がサイコロ1個を3回投げたのち、2段目にいるとする。このとき、考えられる3回のサイコロの目の出方は □ 通りである。

(3) A君がサイコロ1個を4回投げたのち、3段目にいるとする。このとき、考えられる4回のサイコロの目の出方は何通りあるか。

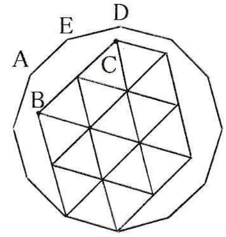
3 ある川の上流に地点 P があり、その 37.8km 下流に地点 Q がある。ある時刻にボートが P から Q に向かって、遊覧船が Q から P に向かって同時に出発した。ボートと遊覧船は出発してから 42 分後にすれ違い、さらにその 12 分後にボートは Q に到着した。ボートは Q で x 分間休んだ後、再び P に向かって出発し、途中で遊覧船を追い越した。ボートが Q を出発してから遊覧船を追い越すまでに要した時間は、ボートが P を出発してから Q を出発するまでに要した時間のちょうど半分であった。川の流れの速さは毎分 am, ボートの静水中での速さは毎分 bm, 遊覧船の静水中での速さは毎分 cm とする。

(1) 遊覧船が Q を出発してから P に到着するまでに要した時間を求めよ。

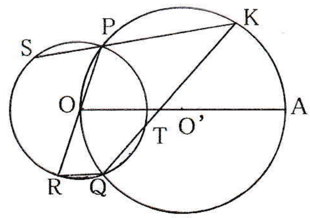
(2) a,b,c の値を求めよ。

(3) ボートが P に到着してから 7 分後に遊覧船が P に到着した。x の値を求めよ。

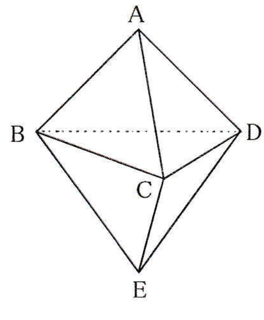
4 1辺の長さが 1 の正十二角形の内部に1辺の長さが 1 の正三角形16個を右図のように並べた。
図の5つの頂点を A,B,C,D,E とする。
(1) 2点 A,B 間の距離を求めよ。
(2) 2点 C,D 間の距離を求めよ。
(3) 五角形 ABCDE の面積を求めよ。



5 2点 P,Q で交わる2つの円 O,O’ があり、円 O,O’ の中心をそれぞれ O,O’ とする。円 O’ の周上に点 O があり、線分 OA が円 O’ の直径となるように円 O’ 上に点 A をとる。右図のように、円 O’ の弧 PA（ただし、点 O を含まない側で両端を除く）上に点 K をとり、直線 KP と円 O との交点のうち P でないものを S, 直線 KQ と円 O との交点のうち Q でないものを T, 直線 OP と円 O との交点のうち P でないものを R とする。
(1) PS=QT であることを証明せよ。
(2) QR=QT のとき、直線 KQ は点 O’ を通ることを証明せよ。



6 1辺の長さが 6 である正三角形の面を6つ用いてできる右図のような立体 ABCDE がある。
(1) 2点 A,E 間の距離を求めよ。
(2) 四面体 ABCE の体積を求めよ。
(3) 辺 AB,BC,CE の中点をそれぞれ P,Q,R とする。四面体 ABCE を3点 P,Q,R を通る平面で切ったときにできる切り口の面積を求めよ。



2011年度　灘高等学校　＜解答＞

1 (1) $x=1+\sqrt{2}$, $y=2+\sqrt{3}$, $z=4+\sqrt{6}$ のとき

$xyz-4xy-yz-2zx+8x+4y+2z-8$

$=(yz-4y-2z+8)x-(yz-4y-2z+8)$

$=(x-1)(y-2)(z-4)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\underline{6}$.

(2) 条件より x,y の方程式 $x+\sqrt{6}y=9\sqrt{2}$ …①

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ …②, $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=0$ …③, $\sqrt{6}x+y=8\sqrt{3}$ …④

は解をもつ。①×$\sqrt{6}$−④ より $5y=10\sqrt{3} \Leftrightarrow y=2\sqrt{3}$.

$\therefore x \underset{①}{=} 9\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$.これらを②,③に代入し

$\dfrac{3\sqrt{2}}{a}+\dfrac{2\sqrt{3}}{b}=1$ …②', $\dfrac{3\sqrt{2}}{b}+\dfrac{2\sqrt{3}}{a}=0$ …③' を得る。

②'×$\sqrt{3}$−③'×$\sqrt{2}$ より $\dfrac{\sqrt{6}}{a}=\sqrt{3} \Leftrightarrow a=\underline{\sqrt{2}}$.

②'×$\sqrt{2}$−③'×$\sqrt{3}$ より $-\dfrac{\sqrt{6}}{b}=\sqrt{2} \Leftrightarrow b=\underline{-\sqrt{3}}$.

(3) $x^2-ax-b^3=0$ の整数解を m とすると、もう一方の解は $a-m$ (∵解と係数の関係)で、これも整数。さらに a が奇数であることから、2解の偶奇は異なりこれらの積 $-b^3$ は偶数。b は素数であるから $b=\underline{2}$.

よって $\{m, a-m\}=\{-1,8\}$ または $\{1,-8\}$.

$a=m+(a-m)$ は正であるから $\{-1,8\}$ の場合で $a=\underline{7}$.

(4) $\mathrm{AE}=\dfrac{|1-1+a|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{BF}=\dfrac{|3-9+a|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a-6|}{\sqrt{2}}$.

$\therefore \mathrm{AE}=\mathrm{BF} \Leftrightarrow |a|=|a-6| \Leftrightarrow a=\underline{3}$.

C,D の x 座標は $x^2=x+3 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

CD の傾きは 1 なので

$\mathrm{CD}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)=\underline{\sqrt{26}}$.

2 サイコロを1回投げ1段上がる, 2段上がる, 1段下がる, 0段目に留まることをそれぞれ +1, +2, −1, 0 と表す。

(1) サイコロを3回投げて4段目にいるのは

0+2+2, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1 の場合で、

0+2+2 は 3×2×2=12 通り, その他はそれぞれ

1×1×2=2 通り考えられるので、

計 12+2×3=$\underline{18}$ 通り。

(2) サイコロを3回投げて2段目にいるのは

0+0+2, 0+1+1, 1−1+2, 1+2−1, 2+1−1, 2−1+1

の場合で、0+0+2 は 3×3×2=18 通り,

0+1+1 は 3×1×1=3 通り, その他はそれぞれ

1×3×2=6 通り考えられるので、

計 18+3+6×4=$\underline{45}$ 通り。

(3) サイコロを4回投げて3段目にいるのは

(i) 3回後に1段目にいて4回目に +2,

(ii) 3回後に2段目にいて4回目に +1,

(iii) 3回後に4段目にいて4回目に −1,

のいずれかの場合で、(1),(2) の結果を利用すると

(ii),(iii) はそれぞれ 45×1, 18×3 通り。

また3回投げて1段目にいるのは

0+0+1, 0+2−1, 1−1+1, 1+1−1 の場合で、

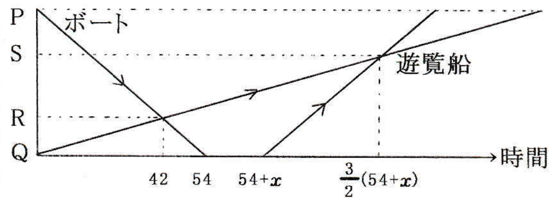
0+0+1 は 3×3×1=9 通り,

0+2−1 は 3×2×3=18 通り, その他はそれぞれ

1×3×1=3 通りであるから、計 9+18+3×2=33 通り。よって (i) は 33×2=66 通りで、

求める場合の数は 66+45+54=165 通り。

3 条件より下図を得る。



(1) ボートと遊覧船が出発後42分に出会った地点を R とすると PR:RQ=42:12=7:2.

よって遊覧船は R から P まで $42\times\dfrac{7}{2}=147$ 分,

QP 間に 42+147=189 分要した。

(2) ボートの下りは $(a+b)$m/分, 遊覧船の上りは $(c-a)$m/分 であるから、PQ 間の距離について

$54(a+b)=189(c-a)=37800$.

$\therefore a+b=700$ …①, $c-a=200$ …②

ボートが遊覧船を追い越した地点を S とすると

QS 間の距離について $(b-a)\dfrac{54+x}{2}=(c-a)\dfrac{3(54+x)}{2}$.

$\therefore b-a=3(c-a)$ …③

① $\Leftrightarrow b=700-a$ …①', ② $\Leftrightarrow c=200+a$ …②' を

③ $\Leftrightarrow b-3c=-2a$ に代入すると

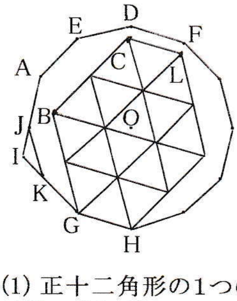
$700-a-3(200+a)=-2a \Leftrightarrow a=50$, $b \underset{①'}{=} 650$, $c \underset{②'}{=} 250$.

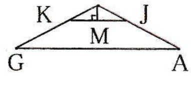
(3) ボートは出発後 189−7=182 分で P に到着した。

Q から P まで $37800\div(b-a)=63$ 分かかるので

休んだ時間は 182−54−63=65 分。

4 図のように頂点を定める。





(1) 正十二角形の1つの内角の大きさは

$\dfrac{180\times(12-2)}{12}=150°$. ∴∠BGK=150−60×2=30°.

$\angle IKJ=180^\circ-\angle JKG=30^\circ$ であるから BG $/\!/$ JK で A,B,G は一直線上にある。
$\angle IJK=30^\circ$ も成り立つので $\triangle IJK$ は IJ=IK の二等辺三角形で、JK の中点を M とすると IM$\perp$JK.
$IK\cos 30^\circ=KM=\frac{1}{2}$ より $IK=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
$\triangle IJK \backsim \triangle IAG$ より $\frac{AG}{JK}=\frac{IG}{IK}=\frac{1/\sqrt{3}+1}{1/\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$.
$\therefore AG=1+\sqrt{3}$, $AB=AG-BG=\sqrt{3}-1$.
(2) 正十二角形の外接円およびその中心を O とすると、DH,FG は円 O の直径なので DGHF は長方形であり、$\angle GDH=(\overset{\frown}{GH}$ に対する円周角$)=15^\circ$.
$$\therefore DG=\frac{GH}{\tan 15^\circ}=\frac{1}{\tan(60^\circ-45^\circ)}$$
$$=\frac{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$$
C は DG 上にあり
CG=(1辺が 1 の正三角形の高さ)$\times 4=2\sqrt{3}$.
$\therefore CD=2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$.
(3) 図形は GH の垂直二等分線に関して対称ゆえ
S:=(五角形 ABCDE)
$=\frac{1}{2}\{$(正十二角形)$-$(1辺が 1 の正三角形)$\times 16$
$-$(長方形 CDFL)$-$(四角形 AJKG)$\times 2\}$.
$\triangle OGH=\frac{1}{2}GH\cdot\frac{DG}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ より正十二角形の面積は $12\triangle OGH=3(2+\sqrt{3})$.
1辺が 1 の正三角形の面積は $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,
(長方形 CDFL)$=CD\cdot DF=2-\sqrt{3}$.
四角形 AJKG は JK=1, AG=$1+\sqrt{3}$, 高さ $KG\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ の台形なので、面積は
$\frac{1}{2}\{1+(1+\sqrt{3})\}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.
$$\therefore S=\frac{1}{2}\left\{3(2+\sqrt{3})-16\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}-(2-\sqrt{3})-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right\}=\frac{6-\sqrt{3}}{4}.$$

$\boxed{5}$ (1) $\triangle OPS$, $\triangle OQT$ はいずれも O を頂角とし等辺が円 O の半径に等しい二等辺三角形で
$\angle OPS=180^\circ-\angle OPK$
$=\angle OQT$ ($\because$ 四角形 OPKQ は円 O' に内接)
よって底角が等しいので頂角も等しく、二辺夾角相等により合同。$\therefore$ PS=QT.
(2) QR=QT のとき $\angle KPQ=90^\circ$ を示せばよい。
QR=QT のとき (1) より QR=PS も成り立つので $\triangle ORQ\equiv\triangle OPS$ (三辺相等) $\therefore \angle ORQ=\angle OPS$.
よって錯角が等しいので SK $/\!/$ RQ.
$\therefore \angle KPQ=\angle PQR$ (錯角)
$=90^\circ$ ($\because$ PR は円 O の直径)

$\boxed{6}$ (1) A から平面 BCD に垂線 AH を下すと $\triangle AHB\equiv\triangle AHC\equiv\triangle AHD$ ($\because \angle AHB=\angle AHC=\angle AHD=90^\circ$, AB=AC=AD, AH 共通より直角三角形において斜辺と他の一辺相等)
$\therefore$ BH=CH=DH, つまり H は $\triangle BCD$ の外心。
同様に、E から平面 BCD に下した垂線の足も H であり、A,H,E は一直線上にある。
$\angle BHC=2\angle BDC=120^\circ$ であるから $\triangle BHC$ は $\boxed{4}$ の $\triangle KIJ$ と相似で $\frac{BH}{BC}=\frac{KI}{KJ}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $BH=2\sqrt{3}$.
三平方の定理より $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=2\sqrt{6}$.
同様に $EH=2\sqrt{6}$ も成り立ち、$AE=2\sqrt{6}\times 2=4\sqrt{6}$.
(2) (1) より (四面体 ABCE)
=(四面体 ABCH)+(四面体 EBCH)
$=\frac{1}{3}\times\triangle BHC\times AH\times 2=\frac{1}{3}\times\triangle BHC\times AE$.
H から BC への距離は $BH\sin 30^\circ=\sqrt{3}$ であるから $\triangle BHC=\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ で、求める体積は
$\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times 4\sqrt{6}=12\sqrt{2}$.
(3) $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BE}=\vec{e}$ とおくと $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\vec{c}$.
中点連結定理より $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\vec{e}$,
$\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c})$.
平面 PQR と直線 AE の交点を X とすると
X は AE 上の点なので実数 t を用いて
$\overrightarrow{BX}=(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BE}=(1-t)\vec{a}+t\vec{e}$ …① と表される。
X は平面 PQR 上の点でもあるから実数 m,n を用いて $\overrightarrow{QX}=m\overrightarrow{QP}+n\overrightarrow{QR}=\frac{m}{2}(\vec{a}-\vec{c})+\frac{n}{2}\vec{e}$
と表される。このとき
$\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QX}=\frac{m}{2}\vec{a}+\frac{1-m}{2}\vec{c}+\frac{n}{2}\vec{e}$ …②
$\vec{a},\vec{c},\vec{e}$ は1次独立であるから、①,②の右辺の係数を比較して $1-t=\frac{m}{2}$, $\frac{1-m}{2}=0$, $t=\frac{n}{2}$.
これらを解くと $t=\frac{1}{2}$, $m=1$, $n=1$. つまり X は AE の中点 H で PQRH は平行四辺形 ($\because \overrightarrow{QH}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR}$)
$|\overrightarrow{QP}|=\frac{1}{2}CA=3$, $|\overrightarrow{QR}|=\frac{1}{2}BE=3$,
$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{e}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}-\vec{c}\cdot\vec{e}}{4}$.
$\vec{c}\cdot\vec{e}=6^2\cos 60^\circ=18$ で、(1) の結果及び
$|\overrightarrow{AE}|^2=|\vec{e}-\vec{a}|^2=|\vec{e}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{e}+|\vec{a}|^2=72-2\vec{a}\cdot\vec{e}$ より
$\vec{a}\cdot\vec{e}=\frac{72-(4\sqrt{6})^2}{2}=-12$. $\therefore \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\frac{-12-18}{4}=-\frac{15}{2}$.
よって求める面積は (平行四辺形 PQRH)
$$=\sqrt{|\overrightarrow{QP}|^2|\overrightarrow{QR}|^2-(\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR})^2}=\sqrt{9^2-\left(-\frac{15}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{2}.$$

2013年度　灘中学校　第1日　(60分)

注意
・問題に書いてある図は必ずしも正しくはありません。
・円周率は 3.14 とします。
・角すいの体積は、(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$ で求められます。

次の問題の□にあてはまる数を解答欄に書き入れなさい。

1　$(\frac{1}{11}-\frac{1}{183})\div 43=(\frac{1}{\square}-\frac{1}{671})\div 167$　(4点)

2　1個の値段が180円の和菓子があります。また、和菓子3個の袋詰めは1袋の値段が500円で、和菓子10個の箱詰めは1箱の値段が1900円です。ある日の売り上げは 19900円で、和菓子は全部で107個売れました。この日、袋詰めは全部で□袋売れました。　(8点)

3　8桁の整数 12345678 に下のような操作を100回続けて行ってできる整数は□です。　(8点)
操作　左から 1,2,3,4,5,6,7,8 番目の数字をそれぞれ左から 2,4,6,8,1,3,5,7 番目に移す。
つまり、ABCDEFGH を EAFBGCHD にする。

4　分母,分子がともに整数で、これ以上約分できない分数のうち、0.5 より大きく 0.51 より小さいものをすべて考えます。ただし、ちょうど 0.5 または 0.51 になる分数は除きます。この中で、分母が 100 以下の分数は□個あります。　(8点)

5　2×2=4 から始めて、2つの数の間のかけ算で新しい数を作ることをくり返します。その際、2 および一度作られた数は、以降の計算に何度でも使えるという決まりにします。
例えば、2×2=4, 4×2=8, 8×2=16 とすると、3回のかけ算で 16 が得られますが、2×2=4, 4×4=16 とすると、2回のかけ算でも 16 が得られます。
このような決まりに従って、かけ算を最低①回すれば 512(2を9個かけた数)が得られ、かけ算を最低②回すれば 32768(2を15個かけた数)が得られます。　(4点×2)

6　A町とB町を結ぶ一本道の途中に、230m の間隔で交差点が4か所あります。どの交差点にも信号があり、青が28秒間，黄と赤が合わせて32秒間点灯することをくり返します。A町からB町に向かって毎秒11.5m の一定の速さで進む車は、最初の信号を青から黄になる瞬間に通過すると、残りの3つの信号も青から黄になる瞬間に通過します。B町からA町に向かって一定の速さで進む車が、一度も止まらずにどの信号も青で通過するには、車の速さは最も速くて毎秒□mです。ただし、赤から青になる瞬間と、青から黄になる瞬間は、青が点灯している時間に含めます。　(8点)

7　2桁の整数 AB があります。間に 0 を入れて3桁の整数 A0B を作ると、この数は AB で割り切れます。また、両端と間に数字 C を入れて5桁の整数 CACBC を作ると、この数も AB で割り切れます。このとき5桁の整数 CACBC は□です。ただし、A,B,C はすべて異なる数字で、どれも 0 ではないとします。
(8点)

8 たくさんのマス目に、ある規則に従って、1 から 400 までの整数を書き入れていきます。1回目は図1のように書き入れました。それを消して、2回目は図2のように書き入れました。整数が2回とも書き入れられたマス目は、全部で□個あります。
(8点)

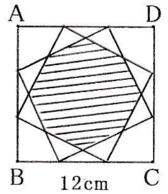
16	15	14	13	
9	8	7	12	⋮
4	3	6	11	18
1	2	5	10	17

図1

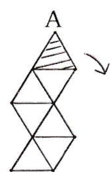
16				
11	17			
7	12	18		
4	8	13	⋱	
2	5	9	14	
1	3	6	10	15

図2

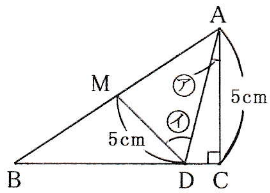
9 右の図は、1辺の長さが 12cm の正方形 ABCD と、それぞれの辺を3等分する点を1つおきに結んでできる図形です。このとき、斜線部分の八角形の面積は□cm^2 です。 (8点)



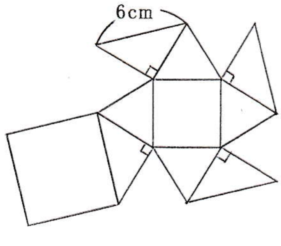
10 1辺の長さが 3cm の正三角形7個を右の図のように並べます。斜線のついた三角形が、その他の三角形でできる図形の周囲に沿って、図の矢印の向きに回転しながらすべることなくひとまわりし、はじめて元の三角形の位置に戻るまで移動します。このとき頂点 A が動いた距離は□cm です。ただし、頂点 A は元の位置に戻るとは限りません。 (8点)



11 右の図の直角三角形 ABC で、M は辺 AB の真ん中の点です。また、㋐の角の大きさは 15 度, AC と MD の長さはともに 5cm です。このとき、㋑の角の大きさは①度, BD の長さは②cm です。 (4点×2)



12 展開図が右の図のような立体の体積は□cm^3 です。ただし、四角形の面は正方形で、三角形の面のうち4個は正三角形, 残り4個は直角二等辺三角形です。 (8点)



13 立方体の形をした容器を傾けて固定し、水を注いだところ、図1のようになりました。さらに水を注ぐと図2のようになり、このときの水の体積は立方体の体積の$\frac{11}{14}$倍でした。図1の水の体積は立方体の体積の□倍です。 (8点)

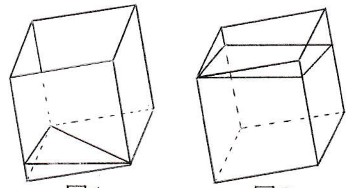


図1 図2

第2日 (60分)

注意
・5 (1),(2),(3) は答えのみ記入しなさい。それ以外は、答え以外に文章や式，図なども書きなさい。
・角すいの体積は、(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$ で求められます。

1 A 君と B 君は P 地点を同時に出発し、P 地点から 42km 離れた Q 地点に向かいました。A 君は一定の速さで進みました。また、B 君は P 地点から 28km 離れた M 地点まで一定の速さで進んだのち20分休み、M 地点から先はそれまでの$\frac{1}{3}$倍の速さで進みました。B 君が M 地点を出発して1時間21分後、A 君は B 君を追い抜き、その後 A 君は B 君より20分早く Q 地点に着きました。　(8点×2)

(1) B 君が M 地点に着いたとき、A 君は B 君の後方何 km の地点にいましたか。

(2) A 君は P 地点を出発して何時間何分後に Q 地点に着きましたか。

2 2013 は4個の連続する数字 0,1,2,3 を並べ替えてできる数です。また、4213 も4個の連続する数字 1,2,3,4 を並べ替えてできる数です。このように、4個の連続する数字を並べ替えてできる4桁の数について考えます。　(8点×2)

(1) 3で割り切れるものは全部で何個ありますか。

(2) 千の位，百の位，十の位の数を左から順に並べてできる3桁の数を3で割ったときの余りと、一の位の数を3で割ったときの余りが等しいものは全部で何個ありますか。

3 図1の四角形 ABCD と図2の四角形 PQRS はともに長方形です。これらの長方形の内部は、図のようにいくつかの正方形だけですき間なく敷きつめることができます。ただし、図は必ずしも正確とは限りません。　(8点×2)

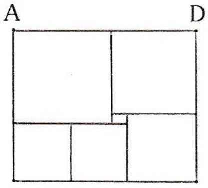


図1

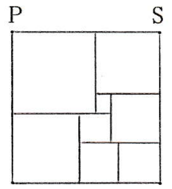


図2

(1) AB の長さと AD の長さの比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

(2) PQ の長さと PS の長さの比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

4 (1) 図1において、AB,AC の長さをそれぞれ求めなさい。　(8点)

(2) 図2のように、長方形 DEFG の内部に、D が中心で DE を半径とする円の一部と、EF を直径とする半円があります。これらは点 H で交わっています。　(8点×2)

① EH の長さを求めなさい。

② 四角形 EFGH の面積を求めなさい。

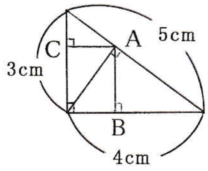


図1

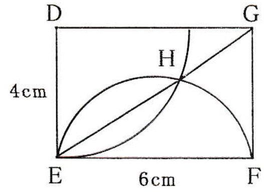


図2

5 辺の長さが 1cm, 2cm, 3cm の直方体の形をした、中身の詰まったブロック 36 個を右の図1のように積み重ねて、1辺の長さが 6cm の立方体を作りました。　(7点×4)

(1) この立方体を頂点 A,B,C を通る平面で切り、D を含む側の立体を残します。このとき、切り口にあるブロックのつなぎ目を図2にかき込みなさい。

(2) 図2の立体を、さらに D,B,E を通る平面で切り、C を含む側の立体を残します。このとき、切り口にあるブロックのつなぎ目を図3にかき込みなさい。

(3) 図3の立体は□個のブロックでできています。そのうち、元の直方体の形をしたブロックは全部で□個あります。

(4) 図3の立体に含まれるブロックのうち、体積が最も小さいものを考えます。そのブロックの体積を求めなさい。

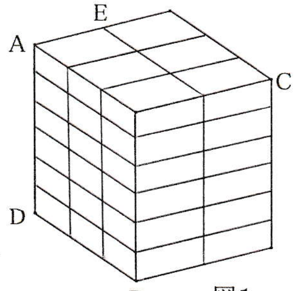


図1

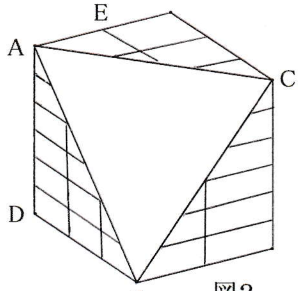


図2

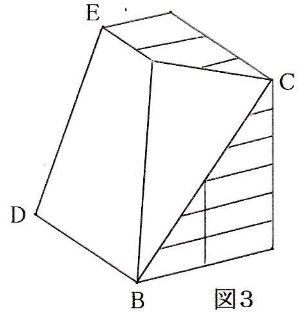


図3

2013年度 灘中学校 第1日 ＜解答＞

$\boxed{1}$ $\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{183}\right)\div 43=\dfrac{183-11}{2013}\div 43=\dfrac{4}{2013}$

$=\dfrac{668}{2013}\div 167.\ \dfrac{1}{671}+\dfrac{668}{2013}=\dfrac{1}{\boxed{3}}.$

$\boxed{2}$ ばら売りの和菓子を x 個, 袋詰めを y 袋, 箱詰めを z 箱売ったとすると

$180x+500y+1900z=19900$

$\Leftrightarrow 9x+25y+95z=995$ …①

$x+3y+10z=107$ …②

①−②×9 より $-2y+5z=32 \Leftrightarrow y=\dfrac{5}{2}z-16$ …③

$\therefore x \underset{②}{=} -3y-10z+107 \underset{③}{=} -\dfrac{35}{2}z+155.$

$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ より $\dfrac{32}{5}\leqq z\leqq\dfrac{62}{7}.$

さらに x,y は整数であるから z は偶数で $z=8.$

$\therefore y \underset{③}{=} \dfrac{5}{2}\times 8-16=\boxed{4}.$

$\boxed{3}$ 12345678→51627384→75318642→87654321→48372615→24681357→12345678 と6回の操作で元に戻る。よって 100=6×16+4 回の操作は4回の操作と同じ数字 $\boxed{48372615}$ を作る。

$\boxed{4}$ (i) 分母が偶数のとき $0.5<\dfrac{n}{2m}<0.51$

$\Leftrightarrow m<n<1.02m$ を満たす整数 m,n が存在するためには $1.02m>m+1 \Leftrightarrow m>50$ が必要で、このとき分母 $2m$ は 100 を超える。つまり分母が 100 以下の分数で、0.5 より大きく 0.51 より小さいものは存在しない。

(ii) 分母が奇数のとき、それは3以上で、任意の整数 m に対し $\dfrac{m}{2m+1}<0.5<\dfrac{m+1}{2m+1}$ が成り立つ。

$\dfrac{m+1}{2m+1}<0.51$ が成り立つのは $1.02m+0.51>m+1$

$\Leftrightarrow m>24.5$ のとき。つまり $m=25,\cdots,49$ の場合の

$\dfrac{26}{51},\cdots,\dfrac{50}{99}$ は 0.5 より大きく 0.51 より小さい。

さらに $2(m+1)-(2m+1)=1$ に注意すると、これらの分数は既約である。実際、左辺は $m+1$ と $2m+1$ の公約数で割り切れるので、公約数は1のみである。

$\dfrac{m+2}{2m+1}<0.51$ が成り立つのは、$1.02m+0.51>m+2$

$\Leftrightarrow m>74.5$ のときで、このとき $2m+1>100$.

以上より、条件を満たす分数は上に挙げた $\boxed{25}$ 個。

$\boxed{5}$ できるだけ大きな数を作るには 2×2=4, 4×4=16, 16×16=256, 256×256=2^{16} のようにできた数同士をかければよい。

よって3回では 512 を作ることはできないが、

$\boxed{4}$回では作ることができる。(4回目に 256×2=512)

①

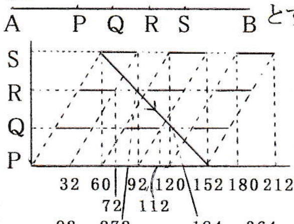
2×2=4, 4×2=8, 8×8=64, 64×64=2^{12}, 2^{12}×8=2^{15}

のように、2^{15} を$\boxed{5}$回で作ることができる。

②

4回で作られるならば、4回目は $2^{14}\times 2,\ 2^{13}\times 2^2,\ 2^{12}\times 2^3,\ 2^{11}\times 2^4,\ 2^{10}\times 2^5,\ 2^9\times 2^6,\ 2^8\times 2^7$ のいずれかであるが、3回目までに作られる数は 2^8 以下で、2^8 と 2^7 の両方を作ることはできない。

$\boxed{6}$



$60+\dfrac{92}{3}=\dfrac{272}{3}$ $60+\dfrac{184}{3}=\dfrac{364}{3}$

交差点を図のように P,Q,R,S とすると、隣接する交差点間は 11.5m/秒で 230÷11.5=20 秒かかるので、青信号点灯時間は左のように20秒ずつずれる。(ー が黄赤)

B町からA町へ向かって一定の速さで進む車が交差点で一度も止まらずに通過できる速さの最大値は図の↘のように進む場合で 690÷92=$\boxed{7.5}$ m/秒

$\boxed{7}$ A0B=100A+B が AB=10A+B の倍数であるとき (100A+B)−(10A+B)=90A も 10A+B の倍数である。

つまり 10A+B は 90,180,…,90×9 のいずれかの約数である。

また CACBC=10101×C+1000A+10B

=10101C+10(100A+B) が 10A+B の倍数であるから 10101C も 10A+B の倍数である。

10101=3×7×13×37 に注意すると 10A+B が 90A と 10101C の2桁の公約数になるのは

A=1 のとき (AB,C)=(15,5),(18,6)

↑

B=C となり不適

A=2 のとき 90A=180 の約数で 20 以上 30 未満のものは 20 だけであるが B=0 となり不適。

A=3,4,5,6,7,8,9 のときも同様に不適。

以上より A=1,B=8,C=6 で CACBC=$\boxed{61686}$

8

図1

20行目	400	399	398	···	381
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3行目	9	8	7	···	364
2行目	4	3	6	···	363
1行目	1	2	5	···	362
	一列目	二列目	三列目		二十列目

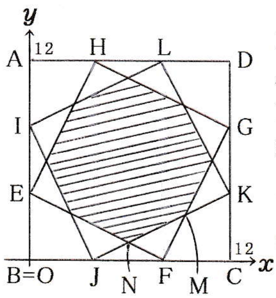
図2

4行目	7			
3行目	4	8		
2行目	2	5	9	
1行目	1	3	6	10
	一列目	二列目	三列目	四列目

図1では下から20行目，左から20列目までの $20\times20=400$ マスに数字が1つずつ入る。図2では n列目，1行目の数が $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ で、28列目,1行目のマスは $\frac{28\times29}{2}=406$ に相当する。従って21～28行目の $1+2+\cdots+8=\frac{8\times9}{2}=36$ 個と 21～28列目の $36-\underset{401\sim406}{\underset{\uparrow}{6}}=30$ 個のマスに数字が記入されている。

よって図1,図2の両方で数字が記入されたマスは $400-(36+30)=\boxed{334}$ 個。

9



図のように座標軸,頂点を定めると、四角形EFGH, IJKL はいずれも一辺が $\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$ cm の正方形で面積は 80cm^2. M は直線 FG: $y=2(x-8)$ と JK: $y=\frac{1}{2}(x-4)$ の交点 $\left(\frac{28}{3},\frac{8}{3}\right)$.

$\therefore \mathrm{MF}=\sqrt{5}\left(\frac{28}{3}-8\right)=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

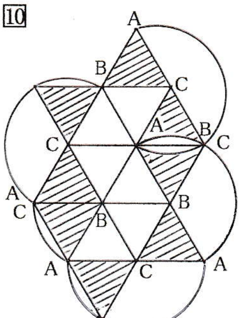
N は直線 JK と EF: $y=-\frac{1}{2}x+4$ の交点 (6,1).

$\therefore \mathrm{NF}=\sqrt{5}$, $\triangle\mathrm{FMN}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{3}\times\sqrt{5}=\frac{10}{3}$.

斜線部の面積は 80 から △FMN 4つ分を引いて

$80-\frac{40}{3}=\boxed{\frac{200}{3}}$ cm^2.

10



A は左の円弧を描く。各弧はいずれも半径が 3cm で、中心角の和は $240°+180°\times3+60°=840°$ よって A が動いた距離は $3\times2\times3.14\times\frac{840}{360}$ $=\boxed{43.96}$ cm.

11 BC の中点を N とすると中点連結定理より

$\mathrm{MN}=\frac{\mathrm{AC}}{2}=\frac{5}{2}$ cm, $\angle\mathrm{MNB}=\angle\mathrm{ACB}=90°$

$\therefore \angle\mathrm{MDN}=30°$, $\mathrm{DN}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

∴㋑$=180-\angle\mathrm{ADC}-\angle\mathrm{MDN}$

$=180°-(90°-15°)-30°=\underset{①}{\boxed{75°}}$

$\mathrm{BD}=\mathrm{BN}+\mathrm{ND}=\mathrm{CN}+\mathrm{ND}=2\mathrm{ND}+\mathrm{CD}=5\sqrt{3}+5\tan15°$

$=5\sqrt{3}+5\tan(60°-45°)=5\sqrt{3}+5\cdot\frac{\tan60°-\tan45°}{1+\tan60°\tan45°}$

$=5\sqrt{3}+5\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=5\sqrt{3}+5\cdot\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=\underset{②}{\boxed{10}}$ cm

12

図1

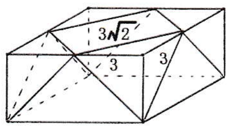


図2

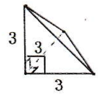
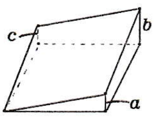


図1のような底面が1辺 6cm の正方形で高さが 3cm の直方体から図2のような三角錐を4つ切除した立体ができる。その体積は $6\times6\times3$ $-\frac{1}{2}\times3\times3\times3\times\frac{1}{3}\times4$ $=\boxed{90}$ cm^3.

13



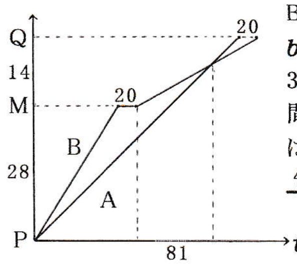
立方体の1辺を1とし、図2の水面から上の部分の長さを左のように定めると条件から $a=c$, $b=a+c$, $\frac{a+c+b}{4}=1-\frac{11}{14}=\frac{3}{14}$.

$\therefore a=c=\frac{3}{14}$, $b=\frac{3}{7}$.

よって図1の水の体積は、底面が1辺が1の正方形の半分で高さが $b-a=\frac{3}{14}$ の三角錐の体積に等しく、立方体の体積の $\frac{1}{2}\times\frac{3}{14}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{28}}$ 倍

第2日 ＜解答＞

1



(1) A君の分速を am, B君のMQ間の分速を bm とするとPM間では $3b$m/分。条件よりPQ間でA,Bが歩いた時間は等しく

$$\frac{42000}{a}=\frac{28000}{3b}+\frac{14000}{b}\quad \therefore a=\frac{9}{5}b$$

よってB君がM地点に着いたときA君は

$28\times\dfrac{a}{3b}=16.8$km 進み、B君の

$28-16.8=$<u>11.2km</u> 後方にいた。

(2) B君がPM間に t 分かかったとすると

A君がB君に追いつくまでに歩いた距離は

$a(t+20+81)=28000+81b$

(1)より $at=16800$, $b=\dfrac{5}{9}a$ であるから

$16800+101a=28000+45a \Leftrightarrow a=200.$

よってA君がPQ間にかかった時間は

$42000\div200=210$分$=$<u>3時間30分</u>

2 (1) 0〜9のうち連続する4数は

(0,1,2,3),(1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,5,6),(4,5,6,7),(5,6,7,8),(6,7,8,9) の7組で、このうち4数の和が3の倍数であるのは (0,1,2,3),(3,4,5,6),(6,7,8,9).

(0,1,2,3)から4桁の数は $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{千の位}}}{3}\times3!=18$個,

(3,4,5,6),(6,7,8,9) からはそれぞれ $4!=24$ 個できるので、計 $18+24\times2=$<u>66</u> 個。

(2) (i) 一の位が3で割り切れるとき

◆一の位が0…他の3桁は 1,2,3 の順列の $3!=6$ 通り考えられる。

◆一の位が3…他の3桁は 0,1,2 から作られる $2\times2!=4$ 通りと 4,5,6 から作られる $3!=6$ 通り。

◆一の位が6…他の3桁は 3,4,5 から作られる6通りと 7,8,9 から作られる6通り。

◆一の位が9…他の3桁は 6,7,8 から作られる6通り。

(ii) 一の位を3で割ると1余るとき

◆一の位が1…条件を満たす4数の組は存在しない。(2+3+0は3で割ると2余り、2+3+4は3で割り切れる。)

◆一の位が4…他の3桁は 2,3,5 から作られる6通り。

◆一の位が7…他の3桁は 5,6,8 から作られる6通り。

(iii) 一の位を3で割ると2余るとき

◆一の位が2…他の3桁は 1,3,4 から作られる6通り。

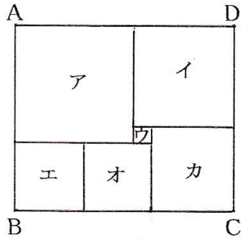
◆一の位が5…他の3桁は 4,6,7 から作られる6通り。

◆一の位が8…条件を満たす4数の組は存在しない。

以上より、条件を満たす4桁の数は

$6\times9+4=$<u>58</u> 個

3 (1) 正方形ウ,オの1辺の長さをそれぞれ a,b とすると他の正方形の1辺の長さはそれぞれ



エ：b, カ：$a+b$

イ：$(a+b)+a=2a+b$

ア：$(2a+b)+a=3a+b$

$\therefore AD=(3a+b)+(2a+b)=5a+2b$,

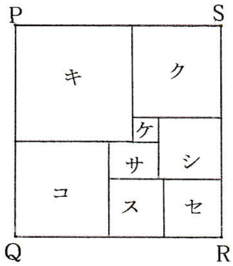
$BC=b+b+(a+b)=a+3b$.

AD=BC より $5a+2b=a+3b \Leftrightarrow b=4a$

$\therefore AB=(3a+b)+b=3a+2b=11a$, $AD=5a+2b=13a$.

$\therefore$ AB:AD=<u>11:13</u>

(2) 正方形ケ,サの1辺の長さをそれぞれ c,d とすると他の正方形の1辺の長さはそれぞれ



シ：$c+d$

ク：$c+(c+d)=2c+d$

ス,セ：$\dfrac{d+(c+d)}{2}=\dfrac{c}{2}+d$

コ：$d+\left(\dfrac{c}{2}+d\right)=\dfrac{c}{2}+2d$

PQ=SR より

キ：$(2c+d)+(c+d)+\left(\dfrac{c}{2}+d\right)-\left(\dfrac{c}{2}+2d\right)=3c+d$

PS=QR より $(3c+d)+(2c+d)=\left(\dfrac{c}{2}+2d\right)+(c+2d)$

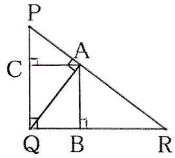
$\Leftrightarrow d=\dfrac{7}{4}c.$

$\therefore PQ=(3c+d)+\left(\dfrac{c}{2}+2d\right)=\dfrac{35}{4}c,$

$PS=(3c+d)+(2c+d)=\dfrac{17}{2}c.$

$\therefore$ PQ:PS=<u>35:34</u>

4 (1) 図のように頂点 P,Q,R を定める。



$\triangle RAQ \backsim \triangle RQP$ より

$\dfrac{AR}{QR}=\dfrac{QR}{PR}$ $\therefore AR=\dfrac{QR^2}{PR}=\dfrac{16}{5}$.

$\therefore PA=PR-AR=5-\dfrac{16}{5}=\dfrac{9}{5}$.

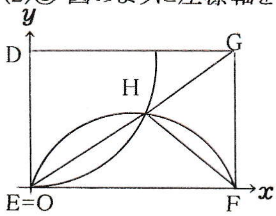
$\triangle ABR \backsim \triangle PQR$ より

$\dfrac{AB}{PQ}=\dfrac{AR}{PR}$ $\therefore AB=\dfrac{AR\cdot PQ}{PR}=\underline{\dfrac{48}{25}}$ cm

$\triangle PCA \backsim \triangle PQR$ より $\dfrac{AC}{RQ}=\dfrac{PA}{PR}$

$\therefore AC=\dfrac{PA\cdot RQ}{PR}=\underline{\dfrac{36}{25}}$ cm

(2)① 図のように座標軸をとる。Dを中心とする円は



$x^2+(y-4)^2=16$ …(i)

EFを直径とする円は

$(x-3)^2+y^2=9$ …(ii)

(i)−(ii) より

$6x-9-8y+16=7$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x$ …(iii)

これが直線EHの方程式であり、(ii)に代入すると

$(x-3)^2+\dfrac{9}{16}x^2=9 \Leftrightarrow \dfrac{25}{16}x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0, \dfrac{96}{25}$.

(iii)と合わせて $H(\dfrac{96}{25}, \dfrac{72}{25})$ を得る。

$\therefore EH=\sqrt{(\dfrac{96}{25})^2+(\dfrac{72}{25})^2}=\dfrac{120}{25}=\underline{\dfrac{24}{5}}$ cm.

② (四角形 EFGH)=△EFH+△FGH

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times \dfrac{72}{25}+\dfrac{1}{2}\times 4\times (6-\dfrac{96}{25})=\underline{\dfrac{324}{25}}$ cm^2.

5 (1)

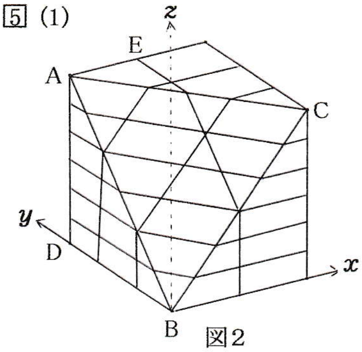


図2

(2)

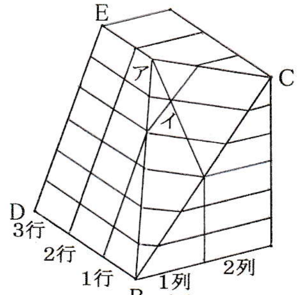


図3

(3) 元あった36個のブロックのうち1行,1列目の最上段のもののみ完全に切除されているので、図3は $\boxed{35}$ 個のブロックでできている。

D,B,Eを通る平面で切られるため1列目のブロックで元の形のものは存在しない。

2列目のブロックで元の形のものは3行目6個,2行目5個(最上段以外),1行目3個。

よって元の形のブロックは計 6+5+3= $\boxed{14}$ 個。

(4) 2行,1列の最上段のブロックをア, 1行,1列,下から5段目のブロックをイとし、これらの体積を比較する。

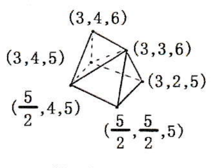
図2のように座標軸をとると

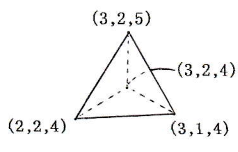
A(0,6,6), B(0,0,0), C(6,0,6) を通る平面は $x+y-z=0$,

D(0,6,0), B(0,0,0), E(3,6,6) を通る平面は $2x-z=0$

でこれらの交線は $y=x, z=2x$

よって、アの頂点は　　　　イの頂点は





アの体積は、底面が台形(上底$\dfrac{3}{2}$,下底2,高さ$\dfrac{1}{2}$)で高さ1の錐の体積 $\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{3}{2}+2)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{24}$ と

底面が等辺1の直角二等辺三角形で高さ$\dfrac{1}{2}$の錐の体積 $\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$ の和 $\dfrac{3}{8}$ に等しい。

イの体積は $\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times 1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

よって求める体積は $\underline{\dfrac{1}{6}}$ cm^3.